

不确定系统稳定性的仿射不等式分析^①谢永强^② 陈建军^③

(西安电子科技大学机电工程学院 西安 710071)

摘 要 针对不确定系统的区间表示不能描述变量间的相关性,相应的区间算法容易导致误差爆炸的缺点,提出了不确定系统的仿射表示法及系统稳定性的仿射不等式判断方法。首先将系统中的不确定信息用仿射参数来表示,得到不确定控制系统传递函数的仿射形式,然后通过求解含仿射参数的不等式组求得了满足系统的稳定性条件时各噪声允许的范围。算例表明,由于考虑了变量间的相关性,相对于区间算法,所提方法可以在更大的不确定范围内判断出系统的稳定性,算例验证了该方法的有效性。

关键词 不确定系统, 稳定性, 仿射不等式, 仿射算法(AA)

0 引言

对不确定系统模型的描述常采用区间模型。区间模型利用不确定变量的上下界来描述不确定变量,这虽能描述出不确定变量的变化范围,却不能描述出不确定变量之间的依赖关系,故对利用区间模型描述的系统进行分析时,常用的区间算法极易出现扩张和溢出,从而导致误差爆炸^[1]。误差爆炸源于区间运算(interval arithmetic, IA)规则的不合理性^[1],例如忽略同一变量之间的完全相关性^[2],还有,倒数运算的溢出以及对数、开方等运算的圆整误差也能增加爆炸的强度。

当不确定系统的不确定性是由一些公共的因素引起时,这些不确定变量可用仿射型来描述,而相应的系统也可利用仿射算法来进行。仿射运算(affine arithmetic, AA)作为新近出现的处理不确定性的方法,运算规则具有优化性质^[1],比较稳定,已被应用在信号处理^[3]、准静态电场分析^[4]、人工智能^[5]及电路分析^[6]中。原始不确定性变量的仿射型是噪声符号的线性组合,如果两个仿射型中拥有同一噪声符号,则二者相关^[2]。拥有相同噪声符号数目越多,相关性越大^[7]。这一性质使得仿射运算能体现变量之间的相关性,加之其运算规则的优化性质,致使仿射运算能最大限度地避免误差爆炸,这是其能被迅速应用的直接原因。

目前,对采用区间模型描述的不确定系统的稳

定性的研究已取得了一定成果,如文献[8]利用区间方法对不确定二阶控制系统稳定性的鲁棒性进行了分析,文献[9]利用线型矩阵不等式对一类区间系统的鲁棒稳定性进行了分析,文献[10]对一类区间不确定系统进行了最优极小极大鲁棒控制研究,但对含仿射变量的不确定系统的稳定性研究迄今几乎还未见相关的论述。由于仿射算法相对于区间算法能考虑到变量间的相关性,因此,本文对含仿射变量的不确定系统的稳定性进行了研究,提出了不确定系统的仿射表示法及系统稳定性的仿射不等式判断方法。

1 不确定性量的仿射型和仿射算法

1.1 仿射型与区间变量

设由于自身或环境原因有 i 种噪声共同影响不确定性量 x 的真值,则其仿射型 $\hat{x}$ 表示为这 i 个噪声符号的一次多项式^[3],如式

$$\hat{x} = x_0 + x_1 \epsilon_1 + x_2 \epsilon_2 + \cdots + x_i \epsilon_i \quad (1)$$

所示。式中: x_0 是 $\hat{x}$ 的中心值; $\epsilon_j \in [-1, 1]$ ($j = 1, 2, \cdots, i$) 是第 j 个噪声符号,其系数 $x_j \in \mathbf{R}$ ($j = 1, 2, \cdots, i$) 称为 $\hat{x}$ 的第 j 个偏增量。

由于 $\epsilon_j \in [-1, 1]$ ($j = 1, 2, \cdots, i$) 代表不同的噪声,所以相互独立,故当 $|\epsilon_1| = |\epsilon_2| = \cdots = |\epsilon_i| = 1$ 时 $\hat{x}$ 取得其最小和最大值。因此,可得 $\hat{x}$ 的区间形式 $\bar{x}$, 可记作

① 863 计划(2006AA04Z402)和国防预研(Y13406040101)资助项目。
② 男,1976 年生,博士生,讲师;研究方向:不确定系统分析与控制。
③ 通讯作者, E-mail: jjchen@xidian.edu.cn
(收稿日期:2008-10-08)

$$\bar{x} = [x_0 - \sum_{j=1}^i |x_j|, x_0 + \sum_{j=1}^i |x_j|] \quad (2)$$

式(2)代表的转化过程造成仿射型原有信息的丢失,而其逆过程不会使丢失的信息得到还原。设

$$\hat{x}_1 = 10 + 2\varepsilon_1 + 1\varepsilon_2 - 1\varepsilon_4$$

$$\hat{x}_2 = 20 - 3\varepsilon_1 + 1\varepsilon_3 + 4\varepsilon_4$$

因 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$ 相互独立,据式(2)可得 $\bar{x}_1 = [6, 14]$ 及 $\bar{x}_2 = [12, 28]$, 则向量 $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ 位于图 1 所示的二维坐标平面内的矩形 $[6, 14] \times [12, 28]$ 中。但是由于 $\hat{x}_1, \hat{x}_2$ 都拥有 ε_1 和 ε_4 , 故二者不完全独立, 则向量 $(\hat{x}_1, \hat{x}_2)$ 仅位于图 1 中的凸 8 边形内。很明显, 凸 8 边形是矩形的子集, 这说明不确定性变量的仿射型在向区间形式的转化中有可能造成原有信息的丢失。

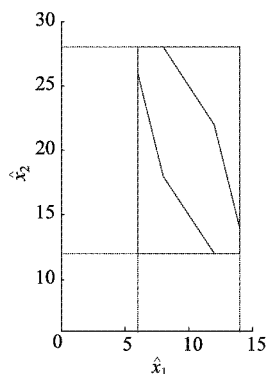


图 1 仿射型 $\hat{x}_1$ 和 $\hat{x}_2$ 的相关性

同一个变量出现在函数的不同项时, 仿射运算能够最大程度地保留其完全相关性, 而区间运算会造成严重的信息丢失^[7]。以 $f(x) = \sqrt{x^2 - x + 1/2} / \sqrt{x^2 + 1/2}$ ($x \in [-2, 2]$) 为例, 将 $[-2, 2]$ 区间 16 等分, 例如当 $x \in [0.5, 0.75]$ 时, 可以分别以区间型和仿射型表示为 $\bar{x} \triangleq [0.5, 0.75]$ 和 $\hat{x} = 0.625 + 0.125\varepsilon$ ($\varepsilon \in [-1, 1]$), 将其分别代入 $f(x)$ 得 $f(\bar{x})$ 和 $f(\hat{x})$, 经计算得 $f(\bar{x}) \in [0, 0.8660]$, $f(\hat{x}) \in [0.5310, 0.5773]$ 。此外, 因 $f(x)$ 在 $[0.5, 0.75]$ 内单调减, 故 $f(x)$ 的真值区间是 $[f(0.75), f(0.5)] = [0.5423, 0.5773]$ 。可见, 由于区间运算的误差爆炸致使 $f(\bar{x})$ 的上下界出现了严重误差, 其结果已无意义; 而由仿射运算所得 $f(\hat{x})$ 的上界与真值区间的上界重合, 仅下界存在微小误差。区间 $[0.5, 0.75]$ 及其它区间内的区间运算与仿射运算的结果对比见图 2 和图 3。可见仿射运算的计算精度很高, 而区间运算由于误差爆炸, 其计算结果是真值区间的几十倍。

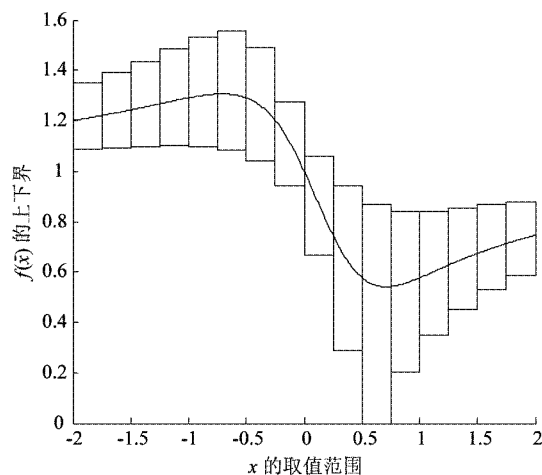


图 2 $[-2, 2]$ 区间内 IA 的误差爆炸

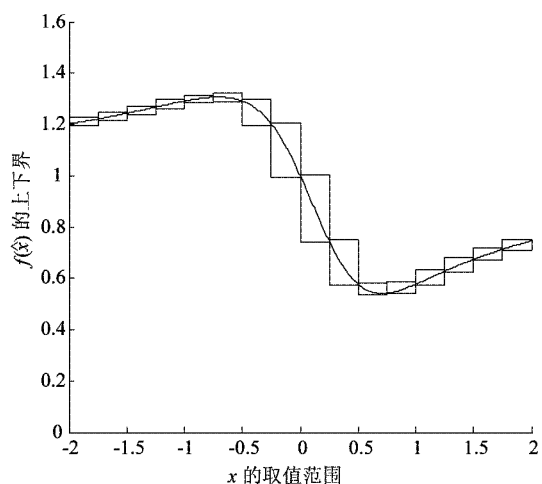


图 3 $[-2, 2]$ 区间内 AA 的计算结果

1.2 仿射运算规则

任何以仿射型或实数为自变量的仿射运算其返回值必须是一仿射型(噪声符号的一次多项式)^[3]。这里仅给出仿射型的加减乘除四则运算, 其余运算规则见文献[4]。

设仿射型

$$\hat{x} = x_0 + x_1\varepsilon_1 + x_2\varepsilon_2 + \cdots x_i\varepsilon_i$$

$$\hat{y} = y_0 + y_1\varepsilon_1 + y_2\varepsilon_2 + \cdots y_i\varepsilon_i$$

及 $\beta \in R, \zeta \in R$, 则有

$$\hat{x} \pm \hat{y} = (x_0 \pm y_0) + (x_1 \pm y_1)\varepsilon_1 + \cdots + (x_i \pm y_i)\varepsilon_i$$

$$\beta\hat{x} = (\beta x_0) + (\beta x_1)\varepsilon_1 + \cdots + (\beta x_i)\varepsilon_i$$

$$\hat{x} \pm \zeta = (x_0 \pm \zeta) + x_1\varepsilon_1 + \cdots + x_i\varepsilon_i$$

$$\begin{aligned} \hat{x} \cdot \hat{y} &= x_0 y_0 + \sum_{j=1}^i (x_0 y_j + y_0 x_j) \varepsilon_j \\ &\quad + \left(\sum_{j=1}^i x_j \varepsilon_j \right) \cdot \left(\sum_{j=1}^i y_j \varepsilon_j \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\hat{x}/\hat{y} &= \hat{x} \cdot (1/\hat{y}) \\ &= \hat{x} \cdot (1/(y_0 + y_1\varepsilon_1 + y_2\varepsilon_2 + \cdots y_i\varepsilon_i))\end{aligned}$$

2 不确定控制系统稳定性的仿射分析

2.1 不确定性控制系统的仿射形式

确定性控制系统可用传递函数

$$W(s) = \frac{b_0 S^m + b_1 S^{m-1} + \cdots + b_m}{S^n + a_1 S^{n-1} + \cdots + a_n} \quad (n > m) \quad (3)$$

来描述。

对于(3)式描述的控制系统,其稳定性可针对其特征方程,用根轨迹法、Routh(劳斯)判据或 Hurwitz(赫尔维茨)稳定性判据进行判定。

当不确定控制系统的参数可表示为仿射形式时,控制系统的传递函数可用式

$$W(s) = \frac{\hat{b}_0 S^m + \hat{b}_1 S^{m-1} + \cdots + \hat{b}_m}{S^n + \hat{a}_1 S^{n-1} + \cdots + \hat{a}_n} \quad (n > m) \quad (4)$$

来描述。式中, $\hat{b}_i: i = 0, m$ 及 $\hat{a}_j: j = 1, n$ 为仿射形式表示的不确定变量。

2.2 不确定系统稳定性的仿射不等式分析

对含仿射变量的不确定系统的稳定性研究可以利用已有的一些判据进行。Routh 判据或 Hurwitz 稳定性判据由于只需直接用特征方程式的系数进行代数运算就可以对系统的稳定性进行判别,因而常被用来对系统的稳定性进行判别。Routh 判据由于要对系数进行倒数运算,在仿射运算时会带来新的噪声,而 Hurwitz 稳定性判据只需用到多项式的乘法和加法运算,故本文采用 Hurwitz 稳定性判据对系统进行分析。

仿射形式的 Hurwitz 稳定性条件为:

(1) 特征多项式中的仿射系数 $\hat{a}_j > 0: j = 1, 2, \cdots, i$;

(2) 含仿射参数的 Hurwitz 行列式

$$H = \begin{bmatrix} \hat{a}_1 & \hat{a}_3 & \hat{a}_5 & \cdots & \cdots \\ \hat{a}_0 & \hat{a}_2 & \hat{a}_4 & \cdots & \cdots \\ 0 & \hat{a}_1 & \hat{a}_3 & \cdots & \cdots \\ 0 & \hat{a}_0 & \hat{a}_2 & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \hat{a}_1 & \hat{a}_3 & \cdots \\ 0 & 0 & \hat{a}_0 & \hat{a}_2 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \hat{a}_i \end{bmatrix}$$

$$\text{其中 } H_1 = [\hat{a}_1] > 0, H_2 = \begin{bmatrix} \hat{a}_1 & \hat{a}_3 \\ \hat{a}_0 & \hat{a}_2 \end{bmatrix} > 0 \quad (5)$$

$H_k(k = 1, 2, \cdots, i)$ 皆为正。式中, $\hat{a}_j: j = 1, \cdots, i$ 为仿射形式表示的不确定变量。

2.3 仿射不等式的解

对于仿射形式的不等式,仿射变量 $\hat{x} = x_0 + x_1\varepsilon_1 + x_2\varepsilon_2 + \cdots x_i\varepsilon_i$, 将其 $\hat{x}$ 的第 j 个偏增量 x_j 改写为如下形式:

$$x_j = \pm \alpha_j K_j, (\alpha_j > 0, K_j > 0)$$

其中:符号的正负由 x_j 的符号决定,表示 x_j 与 ε_j 变化的关系, $\alpha_j K_j$ 表示 x_j 随 ε_j 变化的比例系数,则仿射不等式

$$\hat{x} = x_0 + x_1\varepsilon_1 + x_2\varepsilon_2 + \cdots + x_i\varepsilon_i > 0$$

可以写成如下形式:

$$\hat{x} = x_0 \pm \alpha_1 K_1 \varepsilon_1 \pm \alpha_2 K_2 \varepsilon_2 \pm \cdots \pm \alpha_i K_i \varepsilon_i > 0$$

定理 1 对于形如 $\hat{x} = x_0 \pm \alpha_1 K_1 \varepsilon_1 \pm \alpha_2 K_2 \varepsilon_2 \pm \cdots \pm \alpha_i K_i \varepsilon_i > 0$ 的仿射不等式,如果有 $x_0 > 0$ 成立,则必存在 $K_1 > 0, K_2 > 0, \cdots, K_i > 0$ 使该仿射不等式成立,且成立条件是 $x_0 - \alpha_1 K_1 - \alpha_2 K_2 - \cdots - \alpha_i K_i > 0$ 成立。

证明:由于仿射不等式 $\hat{x} = x_0 \pm \alpha_1 K_1 \varepsilon_1 \pm \alpha_2 K_2 \varepsilon_2 \pm \cdots \pm \alpha_i K_i \varepsilon_i > 0$ 中的噪声项 $\varepsilon_j \in [-1, 1]$ ($1 < j < i$),故有 $\alpha_j K_j \varepsilon_j \leq \alpha_j K_j$ 成立;并且由于 $\alpha_j > 0, K_j > 0$,故有 $\pm \alpha_j K_j \leq \alpha_j K_j$,即有 $\pm \alpha_j K_j \varepsilon_j \leq \alpha_j K_j$ 成立。对该仿射不等式中的每个含偏增量 x_j 的项应用上式结论,即有 $x_0 \pm \alpha_1 K_1 \varepsilon_1 \pm \alpha_2 K_2 \varepsilon_2 \pm \cdots \pm \alpha_i K_i \varepsilon_i > x_0 - \alpha_1 K_1 - \alpha_2 K_2 - \cdots - \alpha_i K_i$,则当 $x_0 - \alpha_1 K_1 - \alpha_2 K_2 - \cdots - \alpha_i K_i > 0$ 成立时,有 $\hat{x} = x_0 \pm \alpha_1 K_1 \varepsilon_1 \pm \alpha_2 K_2 \varepsilon_2 \pm \cdots \pm \alpha_i K_i \varepsilon_i > 0$ 成立。

由定理 1 可知,仿射不等式

$$\hat{x} = x_0 \pm \alpha_1 K_1 \varepsilon_1 \pm \alpha_2 K_2 \varepsilon_2 \pm \cdots \pm \alpha_i K_i \varepsilon_i > 0$$

成立的条件为

$$\begin{cases} x_0 - \alpha_1 K_1 - \alpha_2 K_2 - \cdots - \alpha_i K_i > 0 \\ x_0 > 0 \end{cases}$$

通过解由仿射形式的 Hurwitz 稳定性条件得到的仿射形式的不等式,可以确定使不等式成立的 $K_j(j = 1, \cdots, i)$ 的取值范围,从而确定稳定条件下允许的系统对噪声敏感程度。

3 算例

图 4 所示为单位反馈控制系统,其中 $D(s)$ 为输出变量, $R(s)$ 为控制输入变量, s 为复频率变量,

$\hat{a}_1 = 2 + 2K_1\varepsilon_1 - K_2\varepsilon_2$, $\hat{a}_2 = 1 - K_1\varepsilon_1 + 2K_2\varepsilon_2$ 为两仿射形式的不确定变量, $\varepsilon_i \in [-1, 1]$, $K_i > 0$ ($1 < i < 2$), $K_i > 0$, 求使该系统稳定的 K_1 和 K_2 的范围。

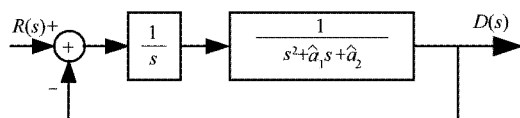


图 4 $[-2, 2]$ 区间内 IA 的误差爆炸

由该系统框图可得该系统的闭环传递函数为

$$W(s) = \frac{\frac{1}{s} \times \frac{1}{s^2 + \hat{a}_1 s + \hat{a}_2}}{1 + \frac{1}{s} \times \frac{1}{s^2 + \hat{a}_1 s + \hat{a}_2}} = \frac{1}{s^3 + \hat{a}_1 s^2 + \hat{a}_2 s + 1}$$

该系统的特征方程为: $s^3 + \hat{a}_1 s^2 + \hat{a}_2 s + 1$ 。

由仿射形式的 Hurwitz 稳定性条件可知, 使该系统稳定的条件是

$$\hat{a}_1 > 0, \hat{a}_2 > 0, \begin{bmatrix} \hat{a}_1 & \hat{a}_3 \\ \hat{a}_0 & \hat{a}_2 \end{bmatrix} > 0$$

将 $\hat{a}_0 = 1$, $\hat{a}_1 = 2 + 2K_1\varepsilon_1 - K_2\varepsilon_2$, $\hat{a}_2 = 1 - K_1\varepsilon_1 + 2K_2\varepsilon_2$, $\hat{a}_3 = 1$ 代入仿射不等式得

$$\hat{a}_1 = 2 + 2K_1\varepsilon_1 - K_2\varepsilon_2 > 0 \quad (6)$$

$$\hat{a}_2 = 1 - K_1\varepsilon_1 + 2K_2\varepsilon_2 > 0 \quad (7)$$

$$\begin{bmatrix} \hat{a}_1 & \hat{a}_3 \\ \hat{a}_0 & \hat{a}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 + 2K_1\varepsilon_1 - K_2\varepsilon_2 & 1 \\ 1 & 1 - K_1\varepsilon_1 + 2K_2\varepsilon_2 \end{bmatrix} > 0 \quad (8)$$

当使用区间算法对 Hurwitz 行列式进行计算时, 相应稳定条件为:

$$\bar{a}_1 > 0, \text{ 即}$$

$$\bar{a}_{1l} = 2 - 2K_1 - K_2 > 0 \quad (9)$$

$$\bar{a}_2 > 0, \text{ 即}$$

$$\bar{a}_{2l} = 1 - K_1 - 2K_2 > 0 \quad (10)$$

$$\begin{bmatrix} \bar{a}_1 & \bar{a}_3 \\ \bar{a}_0 & \bar{a}_2 \end{bmatrix} = \bar{a}_{1l} \times \bar{a}_{2l} - \bar{a}_{0u} \times \bar{a}_{3u} = (2 - 2K_1 - K_2) \times (1 - K_1 - 2K_2) - 1 \times 1 > 0 \quad (11)$$

由以上仿射不等式及区间不等式, 可以得到使不等式成立的 K_1, K_2 的取值范围(如图 5 所示), 使每个不等式成立的不等式范围为相应斜线与两坐标轴所围成的三角区域。例如, 使不等式(6)、(7)、(8)和(11)成立的 K_1 和 K_2 的取值范围分别在图中曲线 1、2、3、4 与两坐标轴所围成的三角区域。

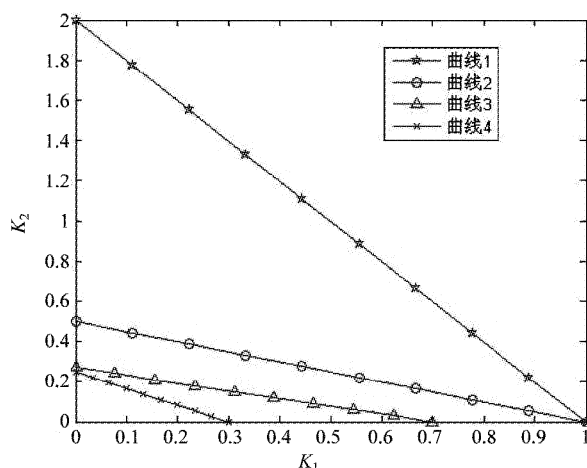


图 5 使各不等式确定的 K_1, K_2 的取值

从图 5 中可以看出, 使用区间算法判断系统稳定性时 K_1, K_2 的取值范围要求得比较苛刻, 而使用仿射算法时, 可以判断出 K_1, K_2 在更大范围取值时, 系统仍然是稳定的。如取 $K_1 = 0.4$, $K_2 = 0$ 时, 可求得当噪声 ε_1 和 ε_2 取极限值 -1 和 $+1$ 时, 使用仿射算法时, $\hat{a}_1$ 和 $\hat{a}_2$ 分别为 $(2.8, 0.6)$ 和 $(1.2, 1.4)$ 两对值, 可验证这两对值都可以保证三个仿射不等式成立, 即系统稳定; 而使用区间算法时, $\bar{a}_{1l} = 2 - 2K_1 - K_2 = 1.2$, $\bar{a}_{2l} = 1 - K_1 - 2K_2 = 0.6$, 有 $\begin{bmatrix} \bar{a}_1 & \bar{a}_3 \\ \bar{a}_0 & \bar{a}_2 \end{bmatrix} = \bar{a}_{1l} \times \bar{a}_{2l} - \bar{a}_{0u} \times \bar{a}_{3u} = 1.2 \times 0.6 - 1 \times 1 = -0.28 < 0$, 将误判系统为不稳定。造成这种误判的原因在于区间算法没有考虑到变量间的相关性。实际上, 由于变量间的相关性, $\hat{a}_1$ 和 $\hat{a}_2$ 不能同时取得最小值。

5 结 论

本文将不确定性变量的仿射型及仿射运算引入到不确定系统稳定性的判断之中, 提出和证明了仿射不等式成立的条件, 通过求解含仿射参数的不等式组可求得满足系统的稳定性条件时各噪声允许的范围。具体的算例证明了当系统的不确定变量可用仿射形式来表示时, 与区间算法相比, 利用仿射算法求得的噪声作用下系统的稳定区间更大, 可以更真实地反映不确定系统的稳定性。文中提出的系统稳定性的仿射不等式判定方法不仅具有理论意义, 也具有一定的工程应用前景。

参考文献

- [1] Shou H, Martin R, Voiculescu I, et al. Affine arithmetic in matrix form for polynomial evaluation and algebraic curve drawing. *Progress in Natural Science*, 2002, 12(1): 77-80
- [2] Stolfi J, de Figueiredo L H. Self-validated numerical methods and applications. In: Proceedings of Monograph for the 21st Brazilian Mathematics Colloquium, St. Paul, Brazil, 1997
- [3] Grimm C, Heupke W, Waldschmidt K. Analysis of mixed-signal systems with affine arithmetic. *IEEE Transactions on Computer-Aided Design of Integrated Circuits and Systems*, 2005, 24(1): 118-123
- [4] Vitelli M. Range analysis in electroquasistatic field linear problems. *IEEE Transactions on Dielectrics and Electrical Insulation*, 2003, 10(1): 155-167
- [5] Goldenstein S K, Vogler C, Metaxas D. Statistical cue integration in DAG deformable models. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 2003, 25(7): 801-813
- [6] Femia N, Spagnuolo G. True worst-case circuit tolerance analysis using genetic algorithms and affine arithmetic. *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, 2000, 47(9): 1285-1296
- [7] de Figueiredo L H, Stolfi J. Affine arithmetic: concepts and applications. *Numerical Algorithms*, 2004, 37: 147-158
- [8] 裴春艳, 陈塑寰. 基于区间方法的不确定二阶控制系统稳定性的鲁棒性分析. 吉林大学学报(工学版), 2006, 36(增刊): 20-25
- [9] 申涛, 王孝红, 袁铸钢. 一类不确定系统的鲁棒稳定性分析. 自动化学报, 2007, 33(4): 426-427
- [10] 井元伟, 姜囡, 郝彬彬. 一类不确定系统的最优极小极大鲁棒控制. 控制与决策, 2008, 23(2): 208-212

Stability analysis of uncertain systems using affine inequalities

Xie Yongqiang, Chen Jianjun

(School of Electromechanical Engineering, Xidian University, Xi'an 710071)

Abstract

To avoid the problem that the interval arithmetic for uncertain systems usually ignores correlations among variables, thus causing the errors explosion in computations, the paper proposes an affine expression method for uncertain systems and a method for analysis of uncertain systems' stability using the affine inequality judgment. Firstly, affine expressions of transfer functions for uncertain control systems are obtained by denoting uncertain information as affine parameters, and then the inequalities with affine parameters are solved and the allowable noise ranges satisfying system stability conditions are found. Compared to the interval arithmetic, the proposed method considers correlations among variables and can judge the stability of uncertain systems in a larger range, which was validated by a computation example.

Key words: uncertain system, stability, affine inequality, affine arithmetic (AA)