

基于非线性最小二乘的电容层析成像图像重建算法^①

陈 宇^② * ** 陈德运 * 王莉莉 * 于晓洋 *

(* 哈尔滨理工大学计算机科学与技术学院 哈尔滨 150080)

(** 东北林业大学信息与计算机工程学院 哈尔滨 150040)

摘 要 针对电容层析成像技术中的“软场”效应和病态问题,提出了基于非线性最小二乘算法的新电容层析成像(ECT)算法。在分析非线性最小二乘问题残量原理的基础上,给出了目标函数中二阶信息项的割线近似的校正公式,并利用 Lipschitz 空间连续的性质对非线性最小二乘算法的收敛性进行了证明,在此基础上探讨了 ECT 应用该算法的可行性。该算法满足收敛条件且重建图像误差小。仿真和实验结果表明,与 LBP、Landweber 和共轭梯度算法相比,对于简单流型该算法兼备成像质量高、边界均匀稳定等优点,该算法的提出为 ECT 图像重建算法的研究提供了一个新的思路。

关键词 电容层析成像(ECT), 图像重建, 迭代算法, 非线性最小二乘

0 引 言

流动层析成像技术是近年来飞速发展起来的一门新技术,该技术在解决多相流检测问题上有巨大的发展潜力和广阔的工业应用前景^[1,2]。电容层析成像技术(electrical capacitance tomography, ECT)因具有成本低、适用范围广、结构简单、非侵入式、安全性能好等优点而成为目前流动层析成像技术发展的主流和研究热点^[3]。但由于 ECT 系统本身固有的非线性特点,而且得到的独立电容测量值(即投影数据)数量非常有限,远远小于重建图像的像素个数,反演问题不存在解析解,同时由于存在非线性和“软场”效应,即敏感场灵敏度分布不均匀,使系统解的稳定性较差且存在严重的病态性,因此图像重建的难度较大^[4,5]。图像重建算法一直是 ECT 实用化及进一步发展的主要难点^[6,7],探索良好的图像重建算法十分重要。

ECT 测量的成功应用在很大程度上依赖于成像算法的精度与速度。目前用于 ECT 图像重建的较常用的方法主要有线性反投影算法(LBP)、正则法^[8]、Landweber 迭代法^[9]、投影 Landweber 迭代法以及共轭梯度法(CG)^[10]等。线性反投影法的特点是算法简单,重建速度快,但因其成像质量相对较差,

严格说来,该算法仅是一种定性算法。正则法因其正则参数的选取对成像质量影响较大,一般采用经验值。但特别值得一提的是,在 Landweber 迭代法基础上发展起来的在线预迭代法(OIOR)^[11],在与 LBP 相同的速度下,能得到与多次 Landweber 迭代一样的成像质量,但空间分辨率仍然没有超过 Landweber 方法。而投影 Landweber 迭代法可明显改善迭代的稳定性及有效地控制噪音,但对于复杂流型通常需要大量迭代才能达到满意的效果,限制了其应用。共轭梯度法(CG)适合于系数矩阵为对称正定的情况,对于简单流型该方法成像时间短,收敛很快,但对于复杂流型时,效果并不理想。应用于 ECT 的神经网络算法在本质上属于模式识别方法^[12],该法的应用取决于神经网络结构的合理构造和训练样本的完备。由于受到多相流中流型变化的随机性和复杂性等因素的影响使得完备训练样本的获取较为困难,而且在实际的应用过程中网络结构的确定也存在一定的困难。考虑到这种情况,本文提出了一种基于非线性最小二乘的电容层析成像算法,实验过程中使用在线的拟牛顿程序对非线性最小二乘 ECT 问题进行求解^[13],简记为 NL2SOL 算法。该算法可大大改善图像重建的稳定性和提高图像重建的质量,实验结果证实了其有效性。

① 国家自然科学基金(60572153),高等学校博士学科点专项科研基金(2008-2011),黑龙江省自然科学基金(F200609),教育部春晖计划(2008-2011),中央高校基本科研业务费专项资金(DL09BB16)和东北林业大学创新基金(091022559)资助项目。

② 男,1975 年生,博士生;研究方向:图像处理,探测与成像技术,多媒体技术;联系人, E-mail: lg_chenyu@yahoo.com.cn (收稿日期:2009-02-06)

1 电容层析成像系统基本原理

电容层析成像系统由电容传感器、数据采集系统、成像计算机三部分组成,如图 1 所示。当管道内的介质分布发生变化时,电容极板对之间的电容就随之变化,由此可根据实际测得的极板电容值反演管道内的介质分布情况。

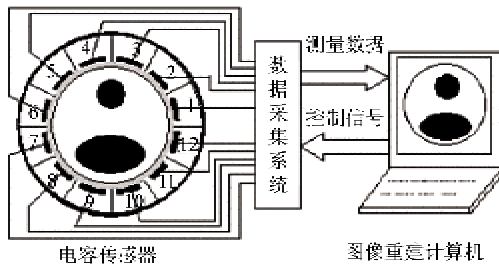


图 1 12 电极电容层析成像系统的组成

本文以典型的 12 电极传感器系统为研究对象。一般地对于一个 N 电极系统,可得到的独立电极对(构成一电容)总数 M 由下式表示:

$$M = C_N^2 = N \cdot (N - 1) / 2 \quad (1)$$

以 12 个极板的某一个极板为起点,顺次为 12 个极板编号。在一个完整的测量过程中,电极板 1 首先被选择为源极板,即公共电极,给电极板 1 加一固定电压值 U ,分别以电极板 2,3,...,12 为检测电极板,测量电极板对 1-2,1-3,...,1-12 之间的电容值,每次测量闲置电极皆接地。下一步,选择电极 2 为公共电极,测量电极对 2-3,2-4,...,2-12 的电容值。依次类推,直至测量完电极对 11-12 的电容值。这样在 12 电极系统中总共可获得 66 个独立的测量值。管道内不同位置的介质对同一极板对的电容值影响程度不同,即场特性。另一方面管道内同一点的介质对不同极板对的电容值的影响也不同。某一个电容极板对之间的电容值,实际上可近似地看作是管道截面内所有点对该电容不同程度的迭加,其电容测量值就可看成管内多相流体在某一方向的投影数据。电容层析成像就是利用这些投影数据来获取多相流的各相参数,从而进行重建图像。

目前,大多数 ECT 成像算法是基于介电常数到电容映射的线性模型,经过离散化、线性化和归一化的模型如式

$$C = SG \quad (2)$$

所示。式中, $C \in R^m$ 为归一化电容向量, $S \in R^{m \times n}$

为系数矩阵(灵敏度矩阵), $G \in R^n$ 为归一化介质分布图像向量。其中,ECT 图像重建的任务就是给定电容值 C 求解介电常数分布 G 。

2 算法原理

NL2SOL 算法属于解非线性最小二乘问题的拟牛顿算法^[14],其基本思想是在最小二乘问题的目标函数中忽略二阶信息项 $S(x)$,使目标函数的二次模型变为

$$\begin{aligned} \bar{m}_k(x) = & \frac{1}{2} r(x_k)^T r(x_k) \\ & + (J(x_k)^T r(x_k))^T (x - x_k) \\ & + \frac{1}{2} (x - x_k)^T (J(x_k)^T J(x_k)) (x - x_k) \end{aligned} \quad (3)$$

该最小二乘问题解的牛顿法为

$$\begin{aligned} x_{k+1} = & x_k - (J(x_k)^T J(x_k) + S(x_k))^{-1} J(x_k)^T r(x_k) \\ = & x_k + s_k \end{aligned} \quad (4)$$

式(3)和(4)中, $r(x)$ 为线性函数, $J(x)$ 是 $r(x)$ 的 Jacobi 矩阵, $s_k = -(J(x_k)^T J(x_k) + S(x_k))^{-1} J(x_k)^T r(x_k)$, $J(x)^T r(x)$ 是目标函数的梯度, $J(x_k)^T J(x_k)$ 是目标函数中忽略二阶信息项的 Hessian 阵。对于大残量问题,通常算法可能收敛很慢,主要原因是没有利用 Hessian 阵中的二阶信息项 $S(x)$ 所造成的,但实际上 $S(x)$ 通常难以计算或者花费工作量很大,因此我们构造 $S(x)$ 的割线近似。

设 B_k 是 $S(x_k)$ 的割线近似,则迭代式(4)成为

$$(J(x_k)^T J(x_k) + B_k) d_k = -J(x_k)^T r(x_k) \quad (5)$$

这里 d_k 是 s_k 进行割线近似后的表达式,并要求 B_k 满足某种拟牛顿条件。由于

$$S(x_{k+1}) = \sum_{i=1}^m r_i(x_{k+1}) \nabla^2 r_i(x_{k+1}) \quad (6)$$

所以 我们用 $B_{k+1} = \sum_{i=1}^m r_i(x_{k+1}) (H_i)_{k+1}$ 去近似 $S(x_{k+1})$, 这里 $(H_i)_{k+1}$ 是 $\nabla^2 r_i(x_{k+1})$ 的拟牛顿近似,故有

$$(H_i)_{k+1} (x_{k+1} - x_k) = \nabla r_i(x_{k+1}) - \nabla r_i(x_k),$$

于是 $B_{k+1} (x_{k+1} - x_k) = \sum_{i=1}^m r_i(x_{k+1}) (H_i)_{k+1} (x_{k+1} - x_k) = (J(x_{k+1}) - J(x_k))^T r(x_{k+1}) \Delta y_k$, 这里对 y_k 进行了定义,并给出了 B_k 所满足的拟牛顿条件。

设 $v_k^T S_k > 0$, $T \in R^{n \times n}$ 是对称正定的加权矩阵,满足 $TT^T S_k = v_k$, 其中 $v_k = J(x_{k+1})^T r(x_{k+1}) -$

$J(x_k)^T r(x_k)$, 则校正

$$B_{k+1} = B_k + \frac{(y_k - B_k s_k) v_k^T + v_k (y_k - B_k s_k)^T}{s_k^T v_k} - \frac{s_k^T (y_k - B_k s_k)}{(s_k^T v_k)^2} v_k v_k^T \quad (7)$$

是极小化问题 $\min \|T^{-T}(B_{k+1} - B_k)T^{-1}\|_F$

s. t. $(B_{k+1} - B_k)$ 对称, $B_{k+1} s_k = y_k$ 的唯一解。

为了使 NL2SOL 算法具有总体收敛性, 采用了信赖域策略, 即每一步都求解如式(3)所示的信赖域模型问题。由式(3)、(4)得到

$$x_{k+1} = x_k - (J(x_k)^T J(x_k) + B_k + u_k I)^{-1} J(x_k)^T r(x_k) \quad (8)$$

基于上述理论, 对于 ECT 重建算法来说, 电容向量 C 和图像分布向量 G 间存在非线性关系

$$C = F(G) \quad (9)$$

以电容测量值和计算值的误差范数平方作为目标函数, 有下式成立:

$$e(G) = \frac{1}{2} \|F(G) - C\|^2 = \frac{1}{2} (F(G) - C)^T (F(G) - C) \quad (10)$$

则其梯度和 Hessian 矩阵分别表示为

$$h_k = (F'(G))^T (F(G) - C) \quad (11)$$

$$H_k = (F'(G))^T F'(G) \quad (12)$$

用灵敏度矩阵 S 取代 $F'(G)$, 以 SG_k 取代 $F(G)$, 则式(8)变为

$$G_{k+1} = G_k - [S^T S + B_k + u_k I]^{-1} S^T (SG_k - C) \quad (13)$$

对于目标函数所忽略的二阶信息项 $S(x)$ 中, 分量 $r_i(x)$ 有时比二阶导数分量 $\nabla^2 r_i(x)$ 变化得更快, 而校正式(7)并没反应出这种变化。这种情况对于 ECT 简单流型的成像问题非常明显, 故在每次迭代中选取一个调比因子

$$r_k = \min \left\{ \frac{s_k^T y_k}{s_k^T B_k s_k}, 1 \right\} \quad (14)$$

乘以迭代矩阵 B_k , 则式(7)修正为

$$B_{k+1} = r_k B_k + \frac{(y_k - r_k B_k s_k) v_k^T + v_k (y_k - r_k B_k s_k)^T}{s_k^T v_k} - \frac{s_k^T (y_k - r_k B_k s_k)}{(s_k^T v_k)^2} v_k v_k^T \quad (15)$$

其中:

$$s_k = -(S^T S)^{-1} S^T (C - SG_k) \quad (16)$$

$$v_k = S^T (C - SG_k) \quad (17)$$

$$y_k = S^T S (G_k - G_{k+1}) \quad (18)$$

对于式(8)和式(13), 在 $S^T S$ 后面加上一个带参数的单位阵, 使其具有良好的正则化性质, 克服了当 S 奇异时, 算法收敛到一个非驻点的情况。同时为了保证算法的全局收敛性, 增加了一维搜索因子, 使其具有“阻尼”作用。而参数 u_k 多根据经验选取, 在这里 $u_k = \|F(x)\|^2 = \|C - SG_k\|^2$ 。

下面对本文 NL2SOL 算法的收敛性进行证明。

设 $f \in C^2$, x^* 为非线性最小二乘问题式(3)的局部极小点, $J(x^*)^T J(x^*)$ 正定。假设由式(8)产生的点列收敛于 x^* , 当 $G(x)$ 与 $(J(x^*)^T J(x^*))^{-1}$ 在 x^* 的邻域内 Lipschitz 连续时, 记 $S(x) = B_k + \mu_k I$, 所以 $J(x^*)^T J(x^*)$ 和 $S(x)$ 也是 Lipschitz 连续, 故存在 $\alpha, \beta, \gamma > 0$, 使得对于 x^* 的邻域内的任意两点 x, y , 有

$$\begin{aligned} \|J(x)^T J(x) - J(y)^T J(y)\| &\leq \alpha \|x - y\|, \\ \|S(x) - S(y)\| &\leq \beta \|x - y\|, \\ \|(J(x)^T J(x))^{-1} - (J(y)^T J(y))^{-1}\| &\leq \gamma \|x - y\| \end{aligned} \quad (19)$$

由于 $f \in C^2$, 且 $G(x)$ Lipschitz 连续, 故

$$g(x_k + s) = g(x_k) + G(x_k)s + O(\|s\|^2) \quad (20)$$

这里 $g(x) = J(x)^T r(x)$ 是梯度, $G(x)$ 是 Hess 矩阵, $G(x) = J(x)^T J(x) + S(x)$, 设 $h_k = x_k - x^*$, 令 $s = -h_k$, 得 $g(x^*) = g(x_k) - G(x_k)h_k + O(\|h_k\|^2)$, 把 $G(x)$ 和 $g(x)$ 带入得

$$J(x_k)^T r(x_k) - (J(x_k)^T J(x_k) + S(x_k))h_k + O(\|h_k\|^2) = 0 \quad (21)$$

由摄动定理对于充分大的 k , $J(x_k)^T J(x_k)$ 正定, 当 x_k 充分靠近 x^* 时有

$$\|(J(x_k)^T J(x_k))^{-1}\| \leq 2 \|(J(x^*)^T J(x^*))^{-1}\| \quad (22)$$

用 $(J(x_k)^T J(x_k))^{-1}$ 乘以式(21)的两边得

$$\begin{aligned} \|x_{k+1} - x^*\| &\leq \|(J(x_k)^T J(x_k))^{-1} S(x_k)\| \\ &\quad \|x_k - x^*\| + O(\|x_k - x^*\|^2) \end{aligned} \quad (23)$$

由式(19), 并利用式(22)得

$$\begin{aligned} \|(J(x_k)^T J(x_k))^{-1} S(x_k)\| &\leq \|(J(x^*)^T J(x^*))^{-1} S(x^*)\| \\ &\quad \|x_k - x^*\| + O(\|x_k - x^*\|^2) \end{aligned} \quad (24)$$

由式(23)和(24)得

$$\begin{aligned} \|x_{k+1} - x^*\| &\leq \|(J(x_k)^T J(x_k))^{-1}\| \cdot \|S(x^*)\| \\ &\quad \cdot \|x_k - x^*\| + O(\|x_k - x^*\|^2) \end{aligned} \quad (25)$$

由式(25), 如果 $r(x^*) = 0$, 则存在 $\epsilon > 0$, 使得对于任何 $x_0 \in N(x^*, \epsilon)$, 由式(8)产生的序列收

敛到 x^* , 且收敛速度是二阶的。

在每次迭代过程中, 要将图像从物理意义上进行修正, 即在每次的迭代循环中引入 G^k 的估计值应是在 0 和 1.0 之间的先验信息。为此, 将式(13)经过修改变为如下的投影 NL2SOL 迭代:

$$G_{k+1} = P_+ [G_k - [\tilde{S}^T S + B_k + u_k I]^{-1} S^T (S G_k - C)] \quad (26)$$

式中 P_+ 是非负凸集上的投影, 并由下式给出

$$P[G_i^{(k)}] = \begin{cases} 0 & G_i^{(k)} \leq 0 \\ G_i^{(k)} & 0 < G_i^{(k)} \leq 1 \\ 1 & G_i^{(k)} > 1 \end{cases} \quad (27)$$

其中 $G_i^{(k)}$ 表示列向量 G 的第 k 次迭代的第 i 个分量。投影算子确保每次迭代都收敛于一个凸集, 使每次迭代的解都非负并有上界限制。实践表明, 经过施加投影算子引入了物理意义上的约束, 在一定程度上能够提高重建图像的质量和重建速度。

3 仿真与实验结果

为了验证算法的有效性, 用 12 电极系统进行了仿真试验。成像时将管道截面用 32×32 网格划分成 1024 个像素, 在管道横截面的有效区域共 856 个成像单元。对典型流型: 层流、核心流、泡状流进行了预设置实验, 成像时采用了统计滤波阈值。采用数值仿真方法对 NL2SOL 算法进行图像重建, 并同线性反投影法 (LBP)、共轭梯度法 (CG) 和 Landweber 迭代法的图像重建质量进行比较, 仿真计算在 MATLAB 在 PIV 3.0G CPU, 512M 内存的计算机上进行。

图像重建速度用迭代次数 N 表示, N 越大则重建时间越长, 说明速度越慢。由于 LBP 法属单步处理, 所以 $N=0$, 迭代法的迭代步数 N 的选取通过数值实验确定。在实验时通常的做法是迭代误差满足

$$\|S G_k - C\| < \xi \quad (28)$$

就停止迭代。在分析重建图像的质量时, 选用空间图像误差作为图像质量评价指标, 其定义如下:

$$\epsilon = \frac{\sum_{i=1}^n |g_i(\text{img}) - g_i(\text{init})|}{\sum_{i=1}^n g_i(\text{init})} \quad (29)$$

式中, g_{img} 为重建图像向量; g_{init} 为介质分布原型图像向量; i 为成像区域剖分单元索引; n 为成像区域单元总数。

实验结果如图 2 所示(黑色区域是水, 白色区域是变压器油)。

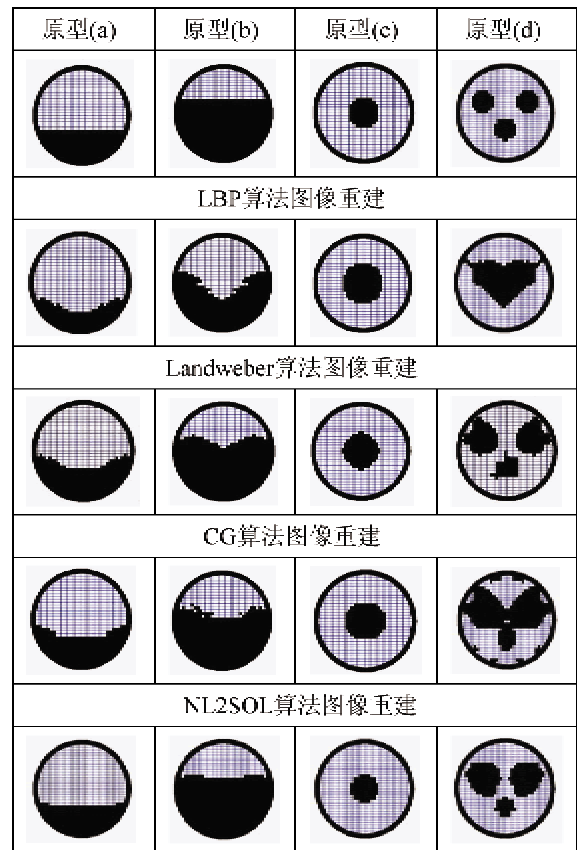


图 2 成像结果的比较

表 1 是图像误差。从图 2 和表 1 可以看出, 对于核心流和层流, NL2SOL 算法大体接近原流型, 且比 Landweber、CG 和 LBP 算法成像效果要好。对于复杂的泡状流型, 可以看出, NL2SOL 算法的图像效果略差于 Landweber 算法。实验表明, 对于非线性最小二乘问题的大残量问题(简单流型), NL2SOL 算法最接近原始流型, 而对于小残量问题(复杂流型), NL2SOL 算法成像结果比 CG 和 LBP 要好。从表 2 可以看出, CG 迭代步数最少, NL2SOL 算法迭代步数最大。从以上分析可以看出, 使用 NL2SOL 算法的图像重建算法, 对于简单流型和复杂流型其成像的精度和质量比 LBP 和共轭梯度算法(CG)要好, 但迭代的步数要多些; 对于复杂的流型, NL2SOL 算法的图像重建质量大体接近 Landweber 算法。

表 1 图像误差 (%)

原型	(a)	(b)	(c)	(d)
LBP	40.32	49.68	86.38	98.71
Landweber	20.16	34.57	45.45	84.61
CG	26.61	38.66	63.63	99.35
NL2SOL	16.93	33.17	9.09	91.02

表 2 迭代步数(次)

原型	(a)	(b)	(c)	(d)
LBP	0	0	0	0
Landweber	21	23	15	13
CG	7	9	6	6
NL2SOL	95	124	79	117

4 结 论

本文提出了一种解非线性最小二乘问题的迭代电容层析成像算法(NL2SOL),在分析最小二乘问题残量误差和 ECT 逆问题病态性的基础上,构造了最小二乘目标函数中忽略二阶信息项 $S(x)$ 的割线近似,并利用 Lipschitz 空间连续的性质对 NL2SOL 算法的收敛性进行了分析和证明。该算法程序编制简单,所需要存储量小,具有成像精度高、易于满足收敛条件等优点。数值实验表明,对于简单流型该算法的图像重建质量好于 LBP 算法、Landweber 和共轭梯度算法(CG),对于重建的图像更接近原流型。对于复杂流型该算法重建的质量略接近于 Landweber 算法,从而为 ECT 图像重建提供了一个新的有效方法。

参考文献

- [1] Loser T, Wajman R, Mewes D. Electrical capacitance tomography image reconstruction along electrical field lines. *Measurement Science and Technology*, 2001, (12): 1083-1091
- [2] Xie C G, Plaskowski A, Beck M S. 8-electrode capacitance system for two-component flow identification. Part 1: Tomographic flow imaging. *IEE Proc A*, 1989, 136(4): 173-190
- [3] Warsito W, Fan L S. Measurement of real-time flow structures in gas-liquid and gas-liquid-solid flow systems using electrical capacitance tomography(ECT). *Chemical Engineering Science*, 2001, 56(6): 6455-6462
- [4] Yang W Q. Modeling of capacitance tomography sensors. *IEE Proc Sci Meas Technol*, 1997, 144(5): 203-208
- [5] Ostrowski K L, Luke S P, Williams R A. Simulation of the performance of electrical capacitance tomography for measurement of dense phase pneumatic conveying. *Chemical Engineering Journal*, 1997, 6: 8197-8205
- [6] Hjertaker B T. Static characterization of a dual sensor flow imaging system. *Flow Measurement and Instrumentation*, 1998, 9: 183-191
- [7] Liu S, Yang W Q, Wang H, et al. Investigation of square fluidized beds using capacitance tomography: preliminary results. *Measurement Science and Technology*, 2002, 12(8): 1120-1125
- [8] Xi S L, Zhao F Z. *Computation Methods for Optimization*. Shanghai: Shanghai Scientific & Technical Publishers, 1983. 7 113-117
- [9] Yang W Q, Peng L H. Image reconstruction algorithms for electrical capacitance tomography. *Meas Sci Technol*, 2003, 14: R1-R3
- [10] Wang H X, Zhu X M, Zhang L F. Conjugate gradient algorithm for electrical capacitance tomography. *Journal of Tianjin University*, 2005, 38(1): 1-4
- [11] Liu S, Fu L, Yang W Q, et al. Prior-online iteration for image reconstruction with electrical capacitance tomography. *IEE Proc-sci Meas Technol*, 2004, 151(3): 195-200
- [12] Zhao J C, Fu W L, Li T S. Image reconstruction new algorithm for electrical capacitance tomography. *Computer engineering*, 2004, 30(8): 54-57
- [13] Dennis J E, Gay D M, Welsh R E. An Adaptive Nonlinear Least-squares Algorithm. *ACM Transaction on Math Software*, 1981, 32(7): 348-368
- [14] Ford J A, Moghrabi I A. Multi-step Quasi-Newton Methods for Optimization. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 1994, 50(17): 305-323

A novel image reconstruction algorithm based on Nonlinear Least-Squares for electrical capacitance tomography system

Chen Yu^{* **}, Chen Deyun^{*}, Wang Lili^{*}, Yu Xiaoyang^{*}

(^{*} School of Computer Science and Technology, Harbin University of Science and Technology, Harbin 150080)

(^{**} College of Information and Computer Engineering of Northeast Forestry University, Harbin 150040)

Abstract

To solve the 'soft-field' nature and the ill-posed problem in the electrical capacitance tomography (ECT) technology, a novel Nonlinear Least-Squares algorithm for electrical capacitance tomography is presented. Based on the analysis of the residual polynomial mechanism of nonlinear least-squares problems, the correcting formula of the secant approximation algorithm in second-order information items of objective functions is given, and the convergence of the NL2OL algorithm is proved by the continuous properties of Lipschitz space. The feasibility of using this algorithm for ECT problems is also discussed. The algorithm meets the convergence condition and its error of image reconstruction is small. The experimental results and simulation data indicate that the algorithm can provide high quality images and favorable stabilization compared with the algorithms of LBP, Landweber and conjugate gradient in the simple flow pattern, and this new algorithm presents a feasible and effective way to research on image reconstruction algorithms for electrical capacitance tomography systems.

Key words: electrical capacitance tomography (ECT), image reconstruction, iterative algorithm, Nonlinear Least-Squares