

MISO 有限反馈误符号率下边界分析^①

王绪振^② 牛 凯 贺志强 张 彬 张 力

(北京邮电大学 泛网无线通信教育部重点实验室 北京 100876)

摘 要 采用矩母函数(MGF)方法进行了多输入单输出(MISO)有限反馈系统误符号率(SER)分析研究。研究表明,有限反馈性能分析对码本设计有指导意义,由于受多方面因素的影响,很难得到误符号率表达式的闭式解,因此进行误符号率下边界的分析是有价值的。本文利用接收信噪比矩母函数和误符号率之间的关系,并且对复球体的球帽表面积做近似处理,得到了误符号率的下边界。该下边界反映了系统的性能受码本大小、发射天线数、调制方式影响,在实际系统的设计中,可以根据误符号率要求得到码本大小。仿真结果验证了理论下边界和实际仿真误符号率的误差小于 0.1dB。

关键词 多输入单输出(MISO), 有限反馈, 误符号率(SER), 矩母函数(MGF)

0 引 言

有限反馈机制^[1]因具有实用性而在多输入单输出(multi-input single-output, MISO)系统中得到广泛应用。有限反馈系统中发射端只根据用户反馈回的少量比特来确定预编码器,其量化会带来一定的性能损失^[2],性能不是最优的,因此对于有限反馈机制的性能分析一直是备受人们关注的研究课题。码本设计^[3-5]是有限反馈系统的核心问题,而性能分析和边界研究对于码本设计具有指导意义,采用的码本、发射天线、调制方式等都和有限反馈的系统性能有密切关系^[6,7]。文献[6]给出了对于任意速率中断概率的下边界,并分析了相对于发射端完全已知信道状态信息(channel state information at transmitter, CSIT)的情况下有限反馈的性能损失,并以此为指导,设计了性能非常接近该下边界的波束成形向量码本。在存在反馈延时下,接收概率密度函数相对于延时的闭式解由文献[8]给出,从而得到反馈延时对于有限反馈系统的性能的影响。虽然目前有限反馈的性能分析有了较大的进展,求得不同的有限反馈机制性能的闭式解仍然是一个难点。本文采用通过求解接收信噪比矩母函数(moment generating function, MGF)^[8]的方法,间接求得 MISO 有限反馈系统的误符号率(symbol error rate, SER)下边界。通过此

下边界,可以对 MISO 有限反馈系统进行系统评估,并且在给定误码率要求时,能够估计出需要采用码本的大小。仿真证明了理论推导的误符号率下边界和实际仿真结果只存在很小误差。

1 系统模型

在 MISO 系统中,发射机端有 N_t 个发射天线,而接收机只有一个天线。令 h_μ 表示接收天线和第 μ 个发射天线之间的系数,那么信道可以表示为 $\mathbf{h} = [h_1, \dots, h_{N_t}]^T$, 其中 h_μ 是独立且同分布的,服从复高斯分布,即

$$\mathbf{h} \sim \text{CN}(0, \mathbf{I}_{N_t}) \quad (1)$$

系统的接收信号可以表示成为

$$y = \mathbf{w}^H \mathbf{h} s + \eta \quad (2)$$

其中, η 为服从均值为 0、方差为 N_0 的加性复高斯噪声。发射波束成形向量 $\mathbf{w} = [w_1, \dots, w_{N_t}]^T$, 且 $\|\mathbf{w}\| = 1$ 。s 为发射信号,每个符号的平均功率为 E_s 。定义 $\bar{\gamma}_s = \frac{E_s}{N_0}$, 那么接收端的接收信噪比为

$$\gamma = |\mathbf{w}^H \mathbf{h}|^2 \frac{E_s}{N_0} = |\mathbf{w}^H \mathbf{h}|^2 \bar{\gamma}_s \quad (3)$$

在有限反馈系统中,码本的大小由反馈信息比特数目 B 确定,一般情况下,码本可以含有 $N = 2^B$ 个码字,码本可以表示为

① 863 计划(2009AA01Z233)和 973 计划(2007CB310604, 2009CB320401)资助项目。

② 男,1981 年生,博士生;研究方向:多用户 MIMO,预编码,有限反馈机制;联系人, E-mail: xuzhen.w@gmail.com (收稿日期:2009-07-14)

$$\mathbf{W} = [\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_N] \quad (4)$$

在 MISO 系统中, $\mathbf{w}$ 即为波束成形向量。假定接收端可以完全已知信道状态信息, 那么, 最优码字根据最大化接收信噪比的准则进行选取^[3], 即

$$\mathbf{w}_{\text{opt}} = \arg \max_{\mathbf{w} \in \mathbf{W}} |\mathbf{w}^H \mathbf{h}|^2 \quad (5)$$

因此, 最优码字是与信道距离最小的码字, 最小距离的平方为

$$z = d^2(\mathbf{w}_{\text{opt}}, \mathbf{h}) = 1 - |\mathbf{w}_{\text{opt}}^H \mathbf{h}|^2 \quad (6)$$

其中 $d()$ 表示两个码字之间的 Chordal 距离^[3]。

以下部分将采用矩母函数方法来对 MISO 有限反馈系统的误符号率进行分析^[9]。

2 误符号率分析

在有限反馈系统中, 当选定最优码字时, 由式(3)和式(6), 接收信噪比可以写成

$$\gamma = (1 - z)\gamma_h \bar{\gamma}_s \quad (7)$$

其中, $\gamma_h = \|\mathbf{h}\|^2$ 。所以, 接收信噪比 γ 的矩母函数为

$$\begin{aligned} \Phi_\gamma &= E[\exp(s\gamma)] \\ &= E[\exp(s(1 - z)\gamma_h \bar{\gamma}_s)] \end{aligned} \quad (8)$$

由式(8)可知, 接收信噪比与最小距离 z 和 γ_h 有关系。为了求得 γ 的矩母函数, 首先假定最小距离 z 是恒定不变的, 即接收信噪比只和 γ_h 有关系。又由于信道 $\mathbf{h}$ 是复高斯的, 其均值为 0, 方差为 $\mathbf{I}_{N_t}$, 则 γ_h 是服从自由度为 $2N_t$ 的卡方分布。所以, γ 的矩母函数可计算得

$$\Phi_{\gamma|z}(s) = \frac{1}{[1 - (1 - z)\bar{\gamma}_s]^{N_t}} \quad (9)$$

由拉普拉斯反变换可以求得接收信噪比的概率密度函数:

$$f_{\gamma|z}(x) = \frac{1}{(N_t - 1)!} [(1 - z)\bar{\gamma}_s x]^{(N_t-1)} e^{-x} \quad (10)$$

由式(6)可知, z 为最优码字和即时信道的最小距离的平方, 如图 1 所示。图 1 中的单位圆表示 N_t 维的单位复球面, $\mathbf{h}$ 和 $\mathbf{w}_i$ 都是 N_t 维的矢量, $a + z = 1$ 。又因为信道是不断变化的, 故 z 也是不断变化的, 它的均值 z_m 下边界可以由以下方法近似得到。

根据文献[3], Grassmannian 子空间封装的方法即在高维空间内找到最小距离最大的一组矢量, 这组矢量一般是对称的, 因此可以近似认为被 $\|\mathbf{h}_1\|^2 = a$ 所切割成的球帽的外表面上的 $\mathbf{h}$ 都选取 $\mathbf{w}_i$ 为最优码字, 该球帽的面积为 $S_{\text{cap}} = S_{\text{ball}}/N$,

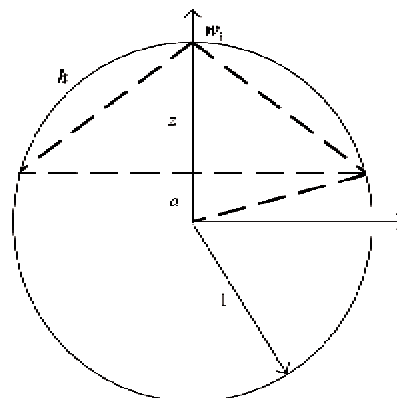


图 1 z 示意图

即当 $\mathbf{h} \in \mathbf{U}_{\text{cap}} = \{\mathbf{h} \mid \|\mathbf{h}_1\|^2 \geq a\}$ 时, $\mathbf{w}_{\text{opt}} = \mathbf{w}_i$, 其中复球体和球帽进行表面积计算均可由文献[6]得到。所以, 假设当 $\mathbf{h} \in \mathbf{U}_0$ 时, $\mathbf{w}_{\text{opt}} = \mathbf{w}_i$, 那么可知 $\mathbf{U}_0$ 的面积为 $S_0 = S_{\text{ball}}/N$ 。

根据以上分析, z 的均值为

$$z_m = \frac{1}{S_0} \int_{U_0} z dS \quad (11)$$

因为 z 为复球面上的点 $\mathbf{h}$ 到球帽顶点 $\mathbf{w}_i$ 的 Chordal 距离^[3], 所以存在以下关系:

$$z_m \geq \frac{1}{S_{\text{cap}} U_{\text{cap}}} \int z dS \quad (12)$$

令 $z_L = \frac{1}{S_{\text{cap}} U_{\text{cap}}} \int z dS$, 即有 $(1 - z_m) \leq (1 - z_L)$, 且

$$\begin{aligned} (1 - z_L) &= \frac{1}{S_{\text{cap}} U_{\text{cap}}} \int_a^1 x [S_{\text{cap}}(x) - S_{\text{cap}}(x - dx)] \\ &= \frac{1}{S_{\text{cap}} U_{\text{cap}}} \int_a^1 x \frac{2\pi^{N_t} [(1 - x)^{N_t-1} - (1 - x - dx)^{N_t-1}]}{(N_t - 1)!} \end{aligned} \quad (13)$$

其中 a 如图 1 所示, 由式

$$S_{\text{cap}} = \frac{2\pi^{N_t} (1 - a)^{N_t-1}}{(N_t - 1)!} = \frac{S_{\text{ball}}}{N} \quad (14)$$

得

$$a = 1 - N \left(\frac{1}{1 - z_L} \right) \quad (15)$$

所以, 式(13)可化简为

$$(1 - z_L) = 1 - \frac{(N_t - 1)}{N_t} N \left(\frac{1}{1 - z_L} \right) \quad (16)$$

由上式可知最小距离 z 只与发射天线的数目 N_t 和码本的大小 N 有关系。由于 MISO 系统必定存在 $N_t > 1$, 则由式(9)可得矩母函数的下边界为

$$\Phi(s) \geq \Phi_L(s) = \frac{1}{[1 - (1 - z_L)\bar{\gamma}_s]^{N_t}} \quad (17)$$

由文献[9], 误符号率和接收信噪比的矩母函数

有一定的关系。对于 MISO 系统,采用 M-PSK 调制方式,且信道为瑞利衰落的,那么该系统的误符号率可以表示为

$$P_e = \frac{1}{\pi} \int_0^{(M-1)\pi/M} \Phi\left(-\frac{g_{\text{PSK}}}{\sin^2 \phi}\right) d\phi \quad (18)$$

其中, $\Phi(\cdot)$ 表示求得的接收信噪比的矩母函数, $g_{\text{PSK}} = \sin^2(\pi/M)^{[10]}$ 。所以,从式(17)可以得到误符号率的下边界为

$$P_L = \frac{1}{\pi} \int_0^{(M-1)\pi/M} \left[1 + (1 - z_L) \bar{\gamma}_s \frac{g_{\text{PSK}}}{\sin^2 \phi}\right]^{-N_t} d\phi \quad (19)$$

所以,只要给定发射天线的数目和采用的码本的大小,通过本文的方法就可以求得该系统的误符号率的下边界。

3 仿真与分析

根据以上分析可知,对于给定发射天线数目、调制方式和采用码本大小的有限反馈 MISO 系统,误符号率的下边界可以由式(19)求得。由仿真实验可以得知,式(19)下边界和实际仿真结果相差很小,尤其是当发射端完全已知信道状态信息时,即可认为采用的码本数目无限大,理论的误符号率和实际仿真结果完全重合。因此仿真实验证明了理论推导的下边界的有效性。

3.1 误符号率仿真

当发射机具有 2 个发射天线时,即 $N_t = 2$, 采用 QPSK 调制方式,可以得到

$$(1 - z_L) = 1 - \frac{1}{2N} \quad (20)$$

此时误符号率的下边界为

$$P_{L2} = \frac{1}{\pi} \int_0^{3\pi/4} \left[1 + \left(1 - \frac{1}{2N}\right) \bar{\gamma}_s \frac{g_{\text{PSK}}}{\sin^2 \phi}\right]^{-3} d\phi \quad (21)$$

图 2 给出了 2 发射天线时的误符号率仿真图,可以看出,理论推导的下边界和实际仿真结果具有微小的差别。

当发射机具有 3 个发射天线时,即 $N_t = 3$, 采用 QPSK 调制方式,可以得到

$$(1 - z_L) = 1 - \frac{2}{3} \frac{1}{\sqrt{N}} \quad (22)$$

此时误符号率的下边界为

$$P_{L3} = \frac{1}{\pi} \int_0^{3\pi/4} \left[1 + \left(1 - \frac{2}{3\sqrt{N}}\right) \bar{\gamma}_s \frac{g_{\text{PSK}}}{\sin^2 \phi}\right]^{-3} d\phi \quad (23)$$

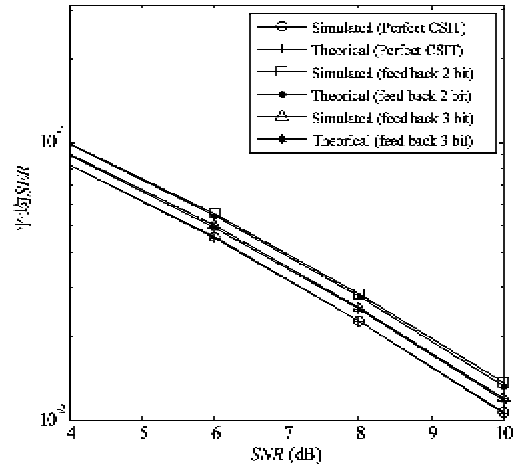


图 2 $N_t = 2$ 时的理论下边界与实际仿真比较图

图 3 给出了 3 发射天线时的误符号率仿真图,可以看出,理论推导的下边界在发射天线为 3 时同样适用。

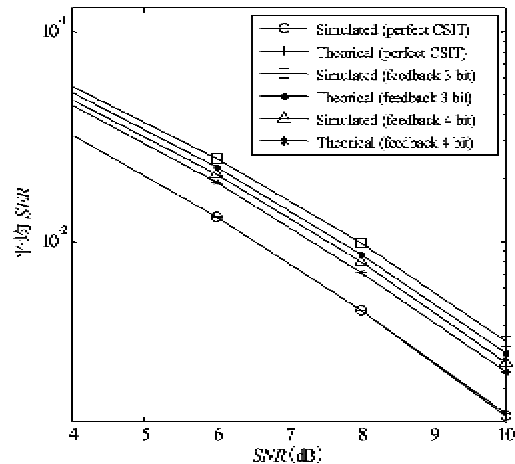
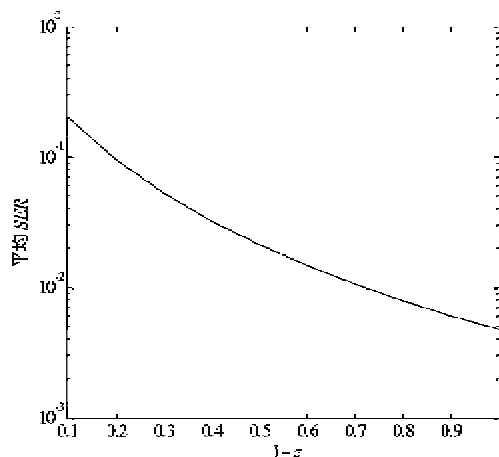


图 3 $N_t = 3$ 时的理论下边界与实际仿真比较图

3.2 码本大小设计

由式(16)可知,MISO 有限反馈系统的误符号率与码本的大小是有一定的关系的,这与直观理解相符。对于给定发射天线的数目、调制方式和采用的发射信噪比,根据式(16),码本大小可由误符号率估计得到,即需要设计多大的码本能够满足误符号率要求。

图 4 给出了 $N_t = 3$, $\bar{\gamma} = 8\text{dB}$ 时误符号率随 z 的曲线图。可计算误符号率小于 0.01 时, $1 - z > 0.72$, 从而根据式(16)得码本大小满足 $N > 5.7$, 即当反馈 3 比特,大小为 $N = 8$ 的码本即可以满足误符号率小于 0.01 的要求。

图4 $N_t = 3, \bar{\gamma} = 8\text{dB}$ 时的误符号率仿真图

4 结论

由于码本量化问题,有限反馈机制不可避免地会存在性能损失。本文从误符号率角度出发,研究了有限反馈系统的性能损失与码本大小的问题。根据矩母函数的误符号率之间的关系,首先求得接收信噪比的矩母函数,然后给出了误符号率和接收信噪比概率密度函数的闭式表达式。根据该闭式表达式,推得误符号率的下边界是码本大小、发射天线数目和调制方式的函数。在给定误符号率要求的情况下,码本的大小可以通过此下边界得到。最后,仿真结果表明本文的误符号率下边界是有效的,对有限反馈系统的分析具有指导意义。

参考文献

- [1] Love D, Heath R, Lau V, et al. An overview of limited feedback in wireless communication systems. *IEEE Journal of Selected Areas in Communications*, 2008, 26(8):1341-1361
- [2] Zheng J, Rao B D. Capacity analysis of MIMO systems using limited feedback transmit precoding schemes. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2008, 56(7):2886-2901
- [3] Love D, Heath R, Strohmer T. Grassmannian beamforming for multiple-input multiple-output wireless systems. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2003, 49(10): 2735-2747
- [4] Roh J C, Rao B D. Transmit beamforming in multiple-antenna systems with finite rate feedback: a VQ-based approach. *IEEE Transactions Information Theory*, 2006, 52(3): 1101-1112
- [5] Santipach W, Honig M L. Asymptotic performance of MIMO wireless channels with limited feedback. In: Proceedings of the IEEE Military Communication Conference, Boston, USA, 2003. 141-146
- [6] Muekkavilli K, Sabharwal A, Erkip E, et al. On beamforming with finite rate feedback in multiple-antenna systems. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2003, 49(10): 2562-2579
- [7] Ekpenyong A, Huang Y. Feedback constraints for adaptive transmission. *IEEE Signal Processing Magazine*, 2007, 24(3): 69-78
- [8] Ma Y, Zhang D B. Error performance of transmit beamforming with delayed and limited feedback. *IEEE Transactions on Wireless Communication*, 2009, 8(3): 1164-1170
- [9] Simon M, Alouini M. Digital Communication over Fading Channels, New York: Wiley, 2000: 259-316
- [10] Zeng E L, Zhu S H, Liao X W, et al. On the performance of amplify-and-forward relay systems with limited feedback beamforming. *IEICE Transactions on Communications*, 2008, 91(6): 2053-2057

The SER low bound analysis of MISO systems with limited feedback

Wang Xuzhen, Niu Kai, He Zhiqiang, Zhang Bin, Zhang Li
(Key Lab of Universal Wireless Communications, Ministry of Education,
Beijing University of Posts and Telecommunications, Beijing 100876)

Abstract

By the moment generating function (MGF) approach, the symbol error rate (SER) of multi-input single-output (MISO) systems with limited feedback was studied. The study shows that the performance analysis for limited feedback systems has a guiding significance to the codebook design, and it is meaningful to investigate the SER lower bound because it is difficult to compute the closed-form expression of SER. The lower bound of SER was obtained by exploiting the relation between the MGF of the received signal-to-noise ratio (SNR) and the SER, and utilizing the approximation of the complex cap surface. The derived lower bound indicates that the system performance is affected by the codebook size, transmit antennas and modulation, and meanwhile, the bound determines the codebook size when the SER requirement is given in the practical environment. The SER bound was demonstrated by the numerical simulations, with the error of less than 0.1dB.

Key words: multiple-input single-output (MISO), limited feedback, symbol error rate (SER), moment generating function (MGF)