

## 基于稀疏分解的置换混叠图像盲分离<sup>①</sup>

段新涛<sup>②\*</sup> 方 勇<sup>③\*\*</sup>

( \* 上海大学通信与信息工程学院特种光纤与光接入网重点实验室 上海 200072 )

( \*\* 新型显示技术与应用集成教育部重点实验室 上海 200072 )

( \*\*\* 河南师范大学计算机与信息技术学院 新乡 453000 )

**摘 要** 针对一类存在形态差异的置换混叠图像,提出了一种基于稀疏分解的置换混叠图像盲分离新算法。该算法为了利用置换混叠图像中被置换区域和置换区域在不同的字典上稀疏表示存在的稀疏差异,分别选择 Contourlet 变换基字典和局部离散余弦变换基字典作为分离的特征域,通过置换混叠图像在两个特征域上的稀疏形态分解,把纹理图像从置换混叠图像中分离出来。实验结果表明,对于一类包含分片光滑和纹理成分的置换混叠图像,该算法能够有效地把纹理图像从置换混叠图像中分离出来,同时,对纹理图像的大小、位置、个数和类型具有鲁棒性。

**关键词** 置换混叠图像,稀疏表示,冗余字典,形态差异,稀疏分解,盲分离

## 0 引言

置换混叠图像的盲分离是一类新型的盲分离问题<sup>[1]</sup>。置换混叠图像与传统的叠加混合图像的不同之处在于其原始图像中的被置换区域有信息丢失,从而失去了信息的完整性,而且其中被置换区域的位置和被置换区域的大小是随机的或是未知的。另外,在置换混叠图像中,被置换的区域可能不只是一个,即置换区域的个数是未知的。这些因素使得这种单信道的置换混叠信号的盲分离非常困难。文献[1]首次提出了典型置换混叠图像盲分离的概念和流程,提出了基于特征域可分性的置换混叠区域检测方法,通过提取各源信号的公共因子,采用特征分离方法检测出相应的激活区间,从而实现了置换混叠信号的分离。且对置换区域和被置换区域的具体图像的类型和内容以及特征域的选取没有限定,从而使得置换混叠图像的内容和分离的方法具有广泛的适用性。文献[2]针对置换图像为插值放大的图像的情况,提出了一种基于有限差分算法的周期特性的盲检测方法,根据插值引入的周期性,利用有限

差分算法提取插值因子的方法来实现置换混叠图像的检测和分离。置换混叠图像的盲分离作为一种新型的盲分离,目前对它的研究还处于起步阶段。针对不同类型的置换混叠图像,如何选择合适的特征域,使得图像中置换区域和被置换区域在这一特征域上显示出差异性或可分性,是目前研究的重点。本文针对一类存在形态差异的置换混叠图像,例如当分片光滑图像被纹理图像置换后而组成的一类置换混叠图像,提出了基于稀疏分解的置换混叠图像盲分离算法。

## 1 置换混叠图像的模型和稀疏表示

### 1.1 置换混叠图像的模型

本节在文献[1]的基础上描述了这类置换混叠图像盲分离的模型。为了描述简洁,以两个图像为例,对于二维的置换混叠图像信号可以排列成一维的列信号。设被置换图像为分片光滑类型的图像用  $s_p$  表示;置换图像为纹理类型的图像用  $s_r$  表示;经过置换混叠后的图像同时包括分片光滑成分和纹理成分,用  $s$  表示,则该置换混叠图像表示式为

① 国家自然科学基金(60872114),上海市科委重点实验室项目(08DZ2231100),上海市重点学科基金(S30108)和上海市教委科研创新重点项目(09ZZ89)资助。

② 男,1972 年生,博士生;研究方向:盲信号处理,图像处理,稀疏表示;E-mail:duanxintao@gmail.com

③ 通讯作者,E-mail:yfang@staff.shu.edu.cn

(收稿日期:2010-11-11)

$$s = f(s_P, s_T) = s_P + s_T \quad (1)$$

在空间上,  $s$  的任一位置上只有一个分量处于激活状态, 置换混叠图像信号的长度为  $N \times 1$  列信号  $s = \{s(1), s(2), \dots, s(N)\}$ , 被置换和置换图像分别表示为  $s_i = \{s_i(1), s_i(2), \dots, s_i(N)\}$ ,  $i = P, T$ , 式(1)可以表示为

$$s(t) = \begin{cases} s_P(t) & t \in U_P \\ s_T(t) & t \in U_T \end{cases} \quad (2)$$

其中  $U_P \cap U_T = \emptyset$ ,  $U_P \cup U_T = U$ ,  $U = \{1, 2, \dots, N\}$ 。

文献[1]提出的基于特征域可分性的置换混叠区域检测方法, 通过提取各源信号的公共因子和采用特征分离方法检测出相应的激活区间, 如式

$$S(\omega) = F[S_P(\omega), S_T(\omega)] \quad (3)$$

所示。式中  $\omega$  为特征因子,  $S(\omega)$  为置换混叠图像  $s$  的特征表达式,  $S_P(\omega)$  是被分片光滑图像在其特征域上的表达式,  $S_T(\omega)$  是纹理图像在其特征域上的表达式。

从上面置换混叠图像的模型可以看出, 观测到的置换混叠图像实际上是两个源图像在两个激活区间的图像子块, 要对置换混叠图像进行分离, 实质上是对置换图像的激活区间进行检测, 即是检测  $U_P$  和  $U_T$ 。

## 1.2 置换混叠图像的稀疏表示

为了能够更稀疏地表示置换混叠图像, 常使用基于超完备的冗余变换基字典来表示图像<sup>[3,4]</sup>, 图像可以由原子的线性组合来表示, 其中由最少个数的原子的线性组合所表示的信号是最优的表示, 也即是信号最稀疏的表示<sup>[5,6]</sup>。

在置换混叠图像中, 被置换图像的基于冗余字典的稀疏表示如式

$$s_P = D_P x_P \quad (4)$$

所示, 其中  $s_P$  表示  $N \times 1$  被置换图像,  $D_P$  是  $N \times L$  的冗余的字典, 且  $L > N$ ,  $x_P$  表示  $L \times 1$  的最稀疏的解。

同样, 置换图像的基于冗余字典的稀疏表示如式

$$s_T = D_T x_T \quad (5)$$

所示, 其中  $s_T$  表示  $N \times 1$  置换图像,  $D_T$  是  $N \times L$  的冗余字典, 且  $L > N$ ,  $x_T$  表示  $L \times 1$  的最稀疏的解。

这样, 置换混叠图像  $s$  的稀疏表示如式

$$s = s_P + s_T = D_P x_P + D_T x_T \quad (6)$$

所示。

由于字典是冗余的, 置换混叠图像稀疏的表示不再像正交基表示那样具有唯一性。找到最稀疏的解  $x_P$  和  $x_T$  的常用算法有两类<sup>[7]</sup>, 一类是针对  $l_0$  范

数求解的匹配追踪算法<sup>[8]</sup>, 另一类是针对  $l_1$  范数求解的基追踪算法<sup>[9]</sup>。然而, 使用匹配追踪算法求解图像的稀疏解时结果往往与使用基追踪算法求解的结果并不一致, 只有当解足够稀疏时, 两种算法的解才是一致的。

## 2 置换混叠图像的分离和字典的选择

### 2.1 置换混叠图像在特征域上的稀疏分解和分离

不同类型的图像在不同的字典上表示的稀疏度往往是不同的。例如纹理图像能够在局部离散余弦基上稀疏表示, 而在一般的小波基上不能稀疏表示。同时, 对于分片光滑图像在双正交小波基上能够稀疏表示, 而在局部离散余弦基上不能稀疏表示<sup>[10]</sup>。这种差异在文献[11]中也称作图像的形态差异 (morphological diversity)。这种差异体现在同一类图像在不同字典上的稀疏度的差异, 同时也体现在不同类图像在相同的字典上的稀疏度的差异。因此, 通过选择合适的字典作为分离的特征域, 根据不同形态图像在特征域上存在稀疏度上的差异, 分别求解两类形态成分的最稀疏的表示, 达到分离的目的, 并且, 这种差异越大越有利于分离<sup>[12]</sup>。

根据置换混叠图像稀疏表示式(6)可知, 在满足  $s = D_P x_P + D_T x_T$  的条件下, 置换混叠图像中的分片光滑图像和纹理图像, 都存在着相对应的能够稀疏表示  $s_P$  和  $s_T$  的字典  $D_P$  和  $D_T$ , 并且该字典仅能稀疏表示相应的图像, 对于非相应的图像不能稀疏表示。因此我们可以把分离问题转化为求解置换混叠图像  $s$  的最稀疏的表示, 如式

$$\{x_P^{opt}, x_T^{opt}\} = \underset{\{x_P, x_T\}}{\text{Arg min}} \{ \|x_P\|_1 + \|x_T\|_1 \} \quad (7)$$

所示。其中,  $x_P^{opt}$ 、 $x_T^{opt}$  分别表示在字典  $D_P$ 、 $D_T$  上对应的最稀疏的解,  $\|x_P\|_1$  表示  $x_P$  的  $l_1$  范数,  $\|x_T\|_1$  表示  $x_T$  的  $l_1$  范数。

实际的置换混叠图像常常含有噪声, 而噪声不能由上述的两个字典稀疏表示。因此通过在式(7)中加一个惩罚项, 把不能由字典  $D_P$  和  $D_T$  稀疏表示的成分归为残差信号, 如式

$$\{x_P^{opt}, x_T^{opt}\} = \underset{\{x_P, x_T\}}{\text{Arg min}} \{ \|x_P\|_1 + \|x_T\|_1 + \lambda \|s - D_P x_P - D_T x_T\|_2^2 \} \quad (8)$$

所示。

同时考虑到, 为了使置换混叠图像中的分片光滑部分更接近于分片光滑图像的模型, 使用全变分

方法,加入一个 TV(Total Variation)惩罚项<sup>[13]</sup>,如式

$$\begin{aligned} \{x_p^{opt}, x_T^{opt}\} = \underset{\{x_p, x_T\}}{\text{Arg min}} \{ & \|x_p\|_1 + \|x_T\|_1 \\ & + \lambda \|s - D_p x_p - D_T x_T\|_2^2 \\ & + \gamma \text{TV}\{s_p\}\} \end{aligned} \quad (9)$$

所示。

表达式  $\gamma \text{TV}\{s_p\}$  表示用 TV 惩罚项去规范分片光滑图像,使得分片光滑图像更接近于分片光滑图像的模型,从而使分离能够顺利进行。

根据块定位松弛算法<sup>[14]</sup>通过求解式(9),得到  $x_p^{opt}$  和  $x_T^{opt}$ ,利用相对应的分片光滑字典  $D_p$  和纹理字典  $D_T$ ,就可以分别得到分片光滑图像  $D_p x_p^{opt}$  和纹理图像  $D_T x_T^{opt}$ ,从而把图像  $s_p$  和  $s_T$  从置换混叠图像  $s$  中分离出来。如式

$$s_p = D_p x_p^{opt} \quad (10)$$

$$s_T = D_T x_T^{opt} \quad (11)$$

所示。其中  $s_p$  为分离出来的被置换图像,  $s_T$  为分离出来的置换图像。因此,把从置换混叠图像中分离纹理图像的问题转化为求解等式(9)的最优解的问题。

置换混叠图像的盲分离的具体步骤如下:

**参数设置:**置换混叠图像  $s$ ,分片光滑字典  $D_p$ ,纹理字典  $D_T$ ,迭代次数  $L_{\max}$ 。

**初始设置:**初始解  $s_p = 0, s_T = 0$ ;初始残差  $r = s$ ;初始阈值  $\delta = \delta_{\max} = \max\{\|D_p^+ s\|_{\infty}, \|D_T^+ s\|_{\infty}\}$  和  $\delta_{\min}$ 。

**执行迭代求解:**  $t = 1$  到  $L_{\max}$ 。

(1) 每次迭代执行:

纹理部分:假定  $s_p$  不变,更新  $s_T$ ;计算残差  $r_T^t = r^{(t-1)} + s_T$ ;计算  $x_T^t = D_T^+(r_T^t)$ ;硬阈值法计算系数  $x_T$ ,阈值为  $\delta$ ,得到系数  $\hat{x}_T^t$ ;计算  $s_T^t = D_T x_T^t$ 。光滑部分:假定  $s_T$  不变,更新  $s_p$ ;计算残差  $r_p^t = r^{(t-1)} + s_p$ ;计算  $x_p^t = D_p^+(r_p^t)$ ;硬阈值法计算系数  $x_p$ ,阈值为  $\delta$ ,得到系数  $\hat{x}_p^t$ ;计算  $s_p^t = D_p \hat{x}_p^t$ 。

用全变分纠正  $s_p^t = s_p^t - \mu \gamma \frac{\partial \text{TV}\{s_p^t\}}{\partial s_p^t}$ 。

(2) 更新残差  $r_T^{(t+1)} = s - s_T^t - s_p^t$ ,更新阈值  $\delta = \delta \times \lambda$ 。

(3) 如果  $\delta > \delta_{\min}$  转至步骤(1),否则结束并转至步骤(4)。

(4) 输出  $s_p^{L_{\max}}$  和  $s_T^{L_{\max}}$ 。

其中,  $D_p^+, D_T^+$  分别是  $D_p, D_T$  的 Moore-Penrose 伪逆。

## 2.2 字典的选择

在上述置换混叠图像的分离过程中,不同类的图像之间的稀疏度的差异越大越好,或者同类图像在相应字典上的表示越稀疏越好,所有这些都和字典的选择密切相关,理论上最好的字典选择可以按照保真度函数等方法来选择。然而,这样的字典选择方法通常比较复杂,为了避免这种复杂性,字典的选择通常并不是按照理论上的最优选择,而是按照不同变换基的特点来选择的。

选择合适的字典以最稀疏的表示图像是分离成功的关键。一般常用来表示分片光滑图像的字典有双正交小波字典、非抽样小波字典、Curvelet 变换基字典。这些字典在用于稀疏表示分片光滑图像时存在一些不足,例如双正交小波字典能对自然场景进行稀疏表示,然而双正交小波仅能表示图像中与尺度无关的元素,而难以表示具有高度各向异性的元素,因此双正交小波并不是高度各向异性特征的最优表示。非抽样小波是在小波变换的基础上,去除了抽样,提高图像特征的估计的精度,能有效地抑制振铃效应,然而用非抽样小波稀疏包含的过多的冗余信息。Curvelet 变换基字典能对具有光滑奇异性曲线的目标函数进行稀疏的表示,然而为了避免分块效应,块与块之间必须有重叠,因此其实现算法的冗余度较高。

Contourlet 变换是 Do 和 Vetterli 提出的一种新的多方向和多尺度的变换,用类似于轮廓段(Contour segment)的基结构来逼近图像<sup>[15]</sup>。Contourlet 变换的基的支撑区间是具有随尺度变化长宽比的“长条形”结构,具有方向性和各向异性,Contourlet 系数中,表示图像边缘的系数能量更加集中,或者说 Contourlet 变换对于图像边缘有更“稀疏”的表达。因此,它能用不同尺度、不同频率的子带更准确地捕获图像中的分段二次连续曲线,从而使表示图像边缘的 Contourlet 系数能量更加集中,从而更加稀疏地表示分片光滑图像,这些特点都是双正交小波变换等变换所不具备的,是一个非常合适的表示分片光滑图像的字典。

表示纹理类型图像常用的字典有 Gabor 变换基字典和局部离散余弦变换基字典。Gabor 变换是在纹理研究中比较常用的方法,其本质是局部离散傅立叶变换,因为其局部化是通过有重叠的信号窗来获得的。离散余弦变换是一正交变换,适合描述平稳信号。离散余弦变换的系数代表着类似于傅立叶分析所获得的频率内容。处理非平稳信号中,离散

余弦变换主要用于分块中。由于离散余弦变换采用重叠分块的方法,具有较高的冗余度,因此该变换是一种超完备变换<sup>[16]</sup>。

### 3 实验结果和分析

本文的实验目的是从一类分片光滑的图像被纹理图像置换而成的置换混叠图像中分离出纹理图像。其中,分片光滑字典由 Contourlet 变换基组成,分解层数为 $[0,2,3,4]$ 。纹理字典由局部离散余弦变换基组成,窗口大小为 $32 \times 32$  像素。迭代次数 300 次,噪声的方差为 $10^{-6}$ ,阈值的初始值为图像在纹理字典和光滑字典中最大系数中较小的值。

**实验 1** 在置换混叠图像中,置换图像大小和置换区域位置都变化。

在图 1 中,子图(a)、(b)、(c)为待分离的置换混叠图像,子图(d)、(e)、(f)为对应的分离的结果。从实验结果可以看出,对于置换区域位于不同的位置的置换混叠图像,能够较好地分离出置换区域,该算法不受置换区域位置变化的影响。尽管,在分离后的图像中出现了一些被置换图边缘信息的痕迹,但并不影响分离的结果。并且对于不同大小置换图像,分别为 $64 \times 64$  像素、 $96 \times 96$  像素、 $32 \times 32$  像素,从图中可以看到,依然能够较好分离出不同大小的置换图像。该算法对置换图像的位置和大小变化具有稳定性。

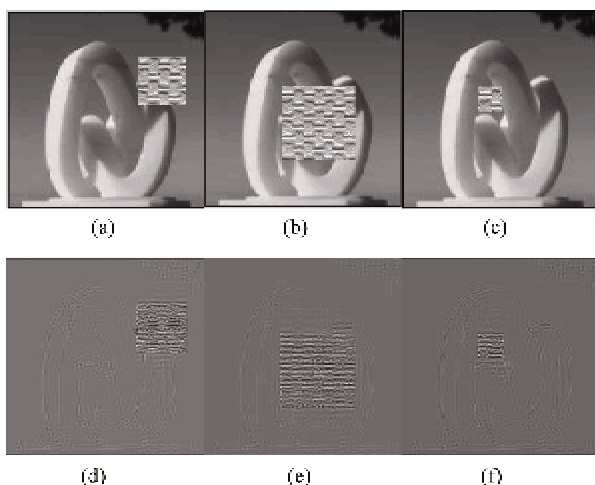


图 1 置换图像大小和位置变化的分离结果

**实验 2** 在置换混叠图像中,被置换图像不变,置换图像的纹理变化。

在图 2 中,子图(a)、(b)、(c)中的置换图像分

别为三种不同的纹理图像,从相应的分离结果(d)、(e)、(f)可以看到,尽管置换图像属于不同的纹理,但只要具有纹理图像的特征,都能够很好地分离出来。

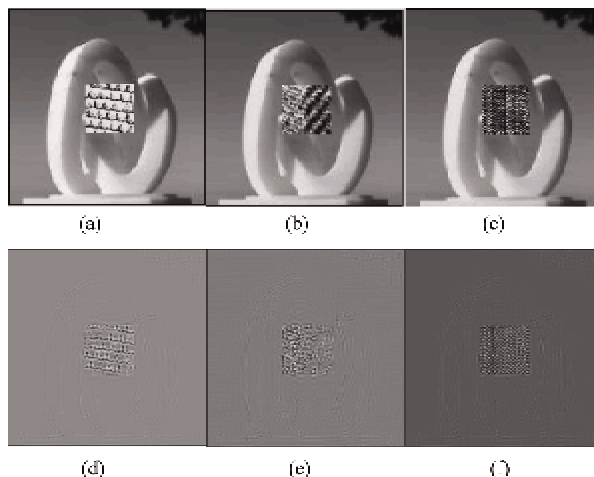


图 2 不同纹理的置换图像分离结果

**实验 3** 在置换混叠图像中,有两个和两个以上的纹理置换图像,纹理图像相同和不同。

在图 3 中,子图(a)、(b)、(c)为待分离的置换混叠图像,其中置换区域的个数变化,不同置换区域的大小和纹理也变化。子图(d)、(e)、(f)为分离的结果,由分离结果看出,能较好地分离出置换区域的纹理图像。

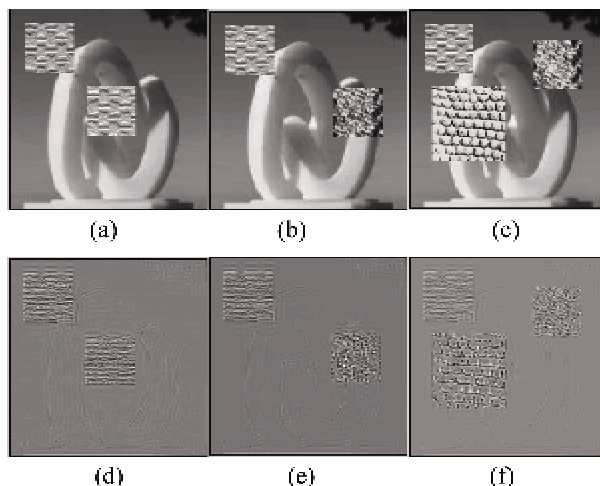


图 3 置换图像个数、纹理、位置都变化的分离结果

**实验 4** 在置换混叠图像中,置换图像为近似的纹理图像,被置换图像为不同的图像。

在图 4 中,子图(a)、(b)、(c)分别是由 3 幅不同的被置换图像和相似的纹理图像构成的置换混叠

图像,子图(d)、(e)、(f)为对应的分离结果。从子图(d)可以看出纹理能够较好地分离出来,而子图(e)、(f)在把置换的纹理图像分离出来的同时,被置换图像中的一些边缘和纹理也被分离出来。这是因为使用的被置换图像并不是严格的分片光滑图像。

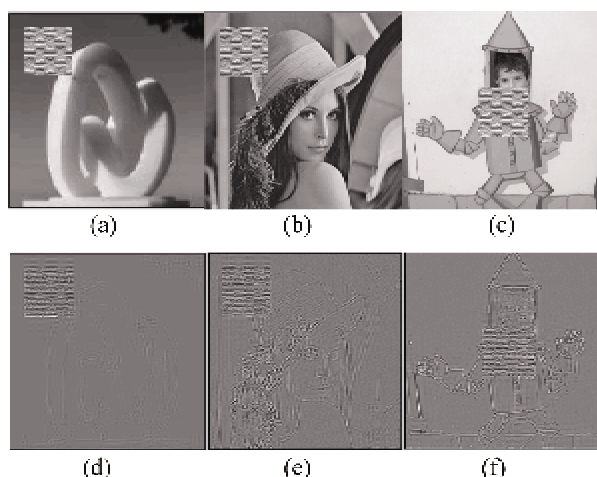


图 4 相似纹理从不同的被置换图像中分离结果

**实验 5** 在置换混叠图像中,使用不同的光滑字典的分离情况。

在图 5 中,子图(a)是要分离的置换混叠图像,子图(b)是用文献[13]中方法分离的结果。可以看到在分离出置换区域的纹理图像的同时,非置换区域图像的较多内容也被当作纹理分离出。子图(c)是用本文方法分离的结果,显然本文方法能较好地分离出置换区域的纹理图像,而保留很少的非置换区域的图像内容。因为本文使用 Contourlet 变换基字典来表示分片光滑图像,所以得到了更稀疏的表示,而文献[13]中采用的是 Curvelet 变换基字典。

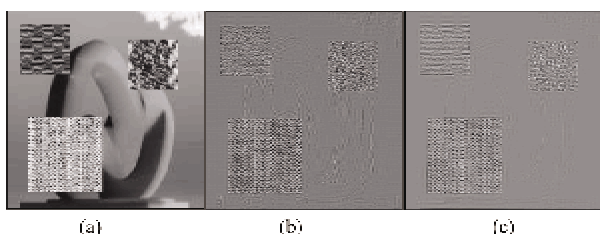


图 5 使用不同光滑字典时的分离结果

通过本文的 5 组实验结果可以看出,对于被置换图像是分片光滑,置换图像是纹理图像的这类置

换混叠图像,本算法能够较好地分离出置换区域的图像,而不受置换区域的位置、大小、个数和纹理图像类型的变化的影响。

## 4 结 论

置换混叠信号的盲分离是一种新型的盲分离,目前对它的研究还处于起步阶段。文献[1]首次提出了置换混叠信号盲分离的概念和分离流程,本文在其基础上,针对一类存在形态差异的置换混叠图像信号,提出了一种基于稀疏分解的置换混叠图像盲分离新算法。该算法根据置换图像与被置换图像在不同的字典的稀疏表示存在差异,分别在两个字典上稀疏形态分解置换混叠图像,从而能够较好地分离出纹理图像。实验结果表明该算法有如下特点:(1)能够分离出不同大小和位置的纹理图像;(2)能够同时分离出多个相同类型的纹理图像;(3)能够同时分离出多个不同种类的纹理图像。

## 参考文献

- [1] 方勇,王伟,王睿. 置换混叠信号的盲检测和分离. 应用科学学报(电子和信息工程版),2009,27(5):491-497
- [2] 王伟,方勇. 基于有限差分的置换图像盲检测方法. 电子学报,2010,38(10):2268-2272
- [3] 张春梅,尹忠科. 基于冗余字典的信号超完备表示和稀疏分级. 科学通报,2006,51(6):628-633
- [4] Elad M, Ma'rio A T F, Yi M. On the role of sparse and redundant representations in image processing. *Proceedings of the IEEE*,2010,98(6):972-982
- [5] Temlyakov V. Nonlinear Methods of approximation:[Research Reports], Department of Mathematics, University of South Carolina. 2001, 1. 9
- [6] Ron R, Alfred M B, Elad M. Dictionaries for sparse representation modeling. *Proceedings of the IEEE*,2010,98(6):1045-1057
- [7] Yang J Y, Peng Y G, Xu W L, et al. Ways to sparse representation; an overview. *Science in China Series F: Information Sciences*, 2009, 52(4):695-703
- [8] Mallat S, Zhang Z. Matching pursuits with time-frequency dictionaries. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 1993, 41(12):3397-3415
- [9] Chen S, Donoho D, Saunders M. Atomic decomposition by basis pursuit. *SIAM J Sci Comput*, 1999, 20(1):33-61
- [10] Starek J L, Elad M, Donoho D. Redundant multiscale

- transforms and their application for morphological component analysis. *Advances in Imaging and Electron Physics*, 2004, 132(82): 287-348
- [11] Bobin J, Starck J L, Fadili M J, et al. Sparsity and morphological diversity in blind source separation. *IEEE Transactions on Image Processing*, 2007, 16(11): 2662-2674
- [12] Fadili M J, Starck J L, Bobin J, et al. Image decomposition and separation using sparse representations: an overview. *Proceedings of the IEEE*, 2010, 98(6): 983-994
- [13] Starck J L, Elad M, Donoho D. Image decomposition via the combination of sparse representations and a variational approach. *IEEE Trans on Image Process*, 2005, 14(10): 1570-1582
- [14] Bruce A, Sardy S, Tseng P. Block coordinate relaxation method for nonparametric signal denoising. In: *Proceedings of International Society for Optical Engineering*, Orlando, USA, 1998, 3391: 75-86
- [15] Do M N, Vetterli M. The contourlet transform: an efficient directional multiresolution image representation. *IEEE Transactions on Image Processing*, 2005, 14(12): 2091-2106
- [16] 李映, 张艳宁, 许星. 基于信号稀疏表示的形态成分分析: 进展和展望. *电子学报*, 2009, 37(1): 146-152

## Blind separation for permuted alias images based on sparse decomposition

Duan Xintao<sup>\* \*\*\*</sup>, Fang Yong<sup>\* \*\*</sup>

(<sup>\*</sup> School of Communication and Information Engineering, Key Laboratory of Specialty Fiber Optics and Optical Access Networks, Shanghai University, Shanghai 200072)

(<sup>\*\*</sup> Key Laboratory of Advanced Display and System Applications, Shanghai 200072)

(<sup>\*\*\*</sup> School of Computer and Information Technology, Henan Normal University, Xinxiang 453000)

### Abstract

This paper presents a new blind separation algorithm for permuted alias images based on sparse decomposing, aiming at a type of permuted alias images with morphological diversity. The method uses the Contourlet dictionary and the local discrete cosine transform dictionary respectively as the characteristic fields of separation so as to use the sparsity diversity existing in sparse representation of the permuting and permuted regions of a permuted alias image. And then the texture image is separated from the permuted alias image by decomposing the permuted alias image on the two characteristic fields. The simulation results show that the proposed algorithm can separate effectively texture images from the permuted alias images regardless of size, location number and types of texture image for a permuted alias image comprising the piecewise smooth part and the texture part.

**Key words:** permuted alias images, sparse representation, redundant dictionary, morphological diversity, sparse decomposition, blind separation