

热可靠性约束下的连续体结构散热拓扑优化^①刘国梁^② 陈建军^③ 马洪波

(西安电子科技大学电子装备结构设计教育部重点实验室 西安 710071)

摘 要 对具有随机参数的连续结构进行了基于热可靠性的导热拓扑优化研究。在连续体结构的热分析中将导热系数、内热源以及边界给定温度分布函数的幅值等均视为随机参数。导出了结构随机温度场的数字特征,定义了以温度随机变量不超越其临界值的热可靠性,建立了以结构总散热弱度均值最小化为目标函数、以给定热可靠度和体积比为约束函数的结构拓扑优化模型。对热可靠性概率约束函数进行了等价显式化处理,并利用移动渐进拓扑优化方法对优化模型求解。通过两个算例证明,该优化模型具有合理性,对其求解的方法是有效的。

关键词 随机, 热传导, 可靠性, 拓扑优化, 移动渐进法(MMA)

0 引 言

散热性是微型化和密集化电子设备结构设计的关键指标之一,导热设计是实现其热分布要求的重要手段。文献[1]通过求解导热性在结构中的分布,提出了树形分布导热思想,但未涉及结构的热传导拓扑优化。文献[2]利用惩罚方法对各向同性实体结构进行了导热拓扑优化。文献[3,4]基于构型理论的散热结构设计,提出了树状分布的导热结构。文献[5]利用进化优化算法对导热结构的拓扑进行设计。文献[6]将热固耦合结构的可靠性进行分析引入到拓扑优化中,取得了较好的结果。文献[7]利用水平集方法对具有强度可靠性约束的连续体结构进行了拓扑优化。文献[8]对稳态热传导下的连续体结构三种不同的性能指标进行了分析,利用独立连续映射方法进行了结构拓扑优化。文献[9]在稳态热传导结构拓扑优化上,考虑了热源引起的热载荷拓扑相关性,将设计域内温度方差最小化作为目标来评价结构内温度均匀的分布状况,并与采用散热弱度最小化为优化目标的结果进行了比较。文献[10]对非概率可靠性进行了分析,结合水平集方法对连续体结构进行拓扑优化。文献[11]利用渐进密度添加进化算法对热传导结构进行了优化。迄今,关于结构热传导拓扑优化的研究主要集中于确

定性模型,即将模型中的所有参数均作为确定性量,很少涉及到不确定因素。然而,对实际结构不可避免地存在着某些不确定因素,如结构物理参数、几何参数及热荷载等取值的分散性即随机性。因此,研究基于概率的连续体结构导热拓扑优化设计问题不仅具有理论意义,而且可为实现结构的热可靠性要求提供有效的方法。鉴于此,本研究对具有随机参数的连续体结构进行了基于热可靠性的拓扑优化设计,构建了以结构散热弱度均值最小为目标函数且满足热可靠性和体积比约束的拓扑优化模型,并利用移动渐进方法(method of moving asymptotes, MMA)求解此模型,而且通过算例显示了此模型和方法的合理性和有效性。

1 随机结构的热传导分析

对各向同性且域 Ω 内有恒定热源的连续体结构在直角坐标系中的稳态热传导平衡方程为

$$\lambda \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + q = 0, (x, y, z) \in \Omega \quad (1a)$$

式中 $T = T(x, y, z)$ 为待求的结构中的温度场, λ 为结构的导热系数, q 为内热源强度。

① 国家自然科学基金(50905134)和中央高校基本科研资金(JY10000904012)资助项目。

② 男,1979年生,博士生;研究方向:结构分析及拓扑优化研究;E-mail: luigl@126.com

③ 通讯作者,E-mail: jjchen@xidian.edu.cn

(收稿日期:2012-03-20)

这里考虑结构的换热方式仅为热传导,而无对流和辐射换热,故仅列出给定结构边界 S 上温度分布的边界条件,即第一类边界条件:

$$T(M) |_{M \in S} = \varphi(M) \quad (1b)$$

其中 $\varphi(M)$ 为边界 S 上的已知函数。

由热传导方程和边界条件,可构造温度场的泛函表达式,进而在求解域 Ω 内离散单元,选取插值函数,然后变分求解,可得结构温度场的有限元方程为

$$\sum_{e=1}^n [K]^{(e)} \{T\}^{(e)} = \sum_{e=1}^n \{F\}^{(e)} \quad (2)$$

式中 $[K]^e = \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 为单元的热传导矩阵。

由于仅有第一类边界条件,则节点热负荷为 $f^e = \int_{V_e} N^T q dV$, 其中 N 为单元的形函数, V 为单元体积变量。

将方程式(2)简记为

$$KT = F \quad (3)$$

其中 $F = \{f_1^e, f_2^e, \dots, f_n^e\}^T$ 为由 f^e 组成的等价热负荷列矢量。

从上有有限元方程可解得结构温度场的形式解向量为

$$T = K^{-1}F \quad (4)$$

为使研究的问题具有一般性,现将出现在结构热传导方程(1a)中的参数导热系数 λ 、热源强度 q 及边界条件(1b)中给定温度分布函数 $\varphi(M)$ 的幅值均视为随机参数。显然,由于这三者的随机性,从而使结构中待求的温度场 T 成为随机变量的函数。考虑到 λ 是结构的物理参数, q 是结构的内热源,而 $\varphi(M)$ 是结构的外热负荷,故三者可视为相互独立的。据此从式(4)出发,利用求解随机变量函数数字特征的代数综合法,可导出结构随机温度场 T 的均值 μ_T 和方差 σ_T^2 :

$$\mu_T = (\mu_q/\mu_\lambda)(1 + \sigma_\lambda^2/\mu_\lambda^2) \quad (5)$$

$$\sigma_T^2 = (\mu_q^2/\mu_\lambda^2)(\sigma_q^2/\mu_q^2 + \sigma_\lambda^2/\mu_\lambda^2) \quad (6)$$

式中, $(\mu_\lambda, \sigma_\lambda^2)$ 、 (μ_q, σ_q^2) 分别是随机参数 λ 和 q 的均值和方差。

2 基于热可靠性的随机参数结构拓扑优化设计

据统计,电子元器件的失效约有 55% 是由于温度过高引起的热失效(指当温度超过某一临界值

T^* 时导致的元器件工作不稳定或功能部分丧失甚至完全丧失)^[12],且随着温度的攀升,其热失效率将呈指数趋势增长。本文研究随机参数结构热拓扑优化设计的目的,旨在获得具有最佳散热效果的结构拓扑分布,从而降低安装在结构上的电子元器件的热失效率。为此,在建立基于热可靠性的结构拓扑优化设计模型时,将安装电子元器件结构上各点的温度随机变量 T 不超越其临界值 T^* (可为随机变量或定值)的概率作为热可靠性约束函数,与该热可靠性对应的功能函数为: $Y = T^* - T$ 。若 T^* 和 T 两者均为随机变量,则由结构可靠性中的应力-强度干涉理论,热可靠性的概率 P_Y 计算表达式可表示为

$$P_Y = P(T^* > T) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_Y(Y) dY \quad (7)$$

式中 $f_Y(Y)$ 为功能函数 Y 的概率密度函数。

这里将结构各单元材料密度 x^e 作为拓扑设计变量,并设定:单元材料密度分别为 1 和 0 时,对应单元材料的导热系数分别为 λ 和 0;当单元材料密度介于 $[0, 1]$ 之间时,其导热系数为 $\lambda^e = x^e \lambda$ 。则由单元的热传导矩阵元素的计算公式,中间密度单元的热传导矩阵元素可表示为 $k^e = x^e k_0$, k_0 为单元材料密度为 1 时的单元热传导矩阵。

为了获得随机参数结构最佳的散热拓扑形式,即在相同热载荷作用下,该结构拓扑具有最低的温度分布,故这里以结构散热弱度随机函数的均值最小化为目标函数。其原因是结构的散热弱度越小,对应结构的散热强度越大,散热效果越好。显然,当利用优化方法获得最佳的散热结构拓扑分布之后,便可据此在该结构上布置电子元器件。

综上,可构建起以结构各单元材料密度 x^e 为拓扑设计变量,以结构总散热弱度均值最小为目标函数,且满足热可靠性约束和体积比约束的连续体结构拓扑优化数学模型,其表达式如下:

$$\begin{aligned} \min \bar{C} &= \bar{T}^T \bar{K} \bar{T} = \sum_{e=1}^N \bar{t}^e \bar{k}^e \bar{t}^e = \sum_{e=1}^N x^e \bar{t}^e \bar{k}_0 \bar{t}^e \\ \text{s. t. } V &= f(V_0) = \sum_{e=1}^N x^e v^e \leq V^* \\ P_Y(Y = T^* - T \geq 0) &\geq P_Y^* \\ \bar{K} \bar{T} &= \bar{F} \\ 0 < x_{\min} &\leq x^e \leq 1 \end{aligned} \quad (8)$$

其中, $\bar{K}$ 、 $\bar{T}$ 、 $\bar{F}$ 分别为热传导矩阵、温度和热负荷列矢量的均值; $\bar{C} = \bar{T}^T \bar{K} \bar{T}$ 为结构总散热弱度随机函数的均值; $\bar{t}^e$ 为单元节点温度均值; v^e 为优化后单元体积; V 为优化后结构体积; V_0 为设计域的初始体

积; V^* 为给定的体积约束值; P_Y^* 为给定的热可靠度; $x_{\min}$ 为设计变量的最小值, 为了防止矩阵奇异, 一般取 $x_{\min} = 0.001$ 。

式(8)中热可靠性约束是以概率形式给出, 不便于优化过程中的计算, 为此这里将其等价显式化为非概率的计算表达式。

假设结构中所求温度场 T 和临界温度 T^* 均为服从正态分布的随机变量(实际中, 若它们不服从正态分布, 则总可以利用当量正态化方法将其等效为正态变量), 即 $T \sim N(\mu_T, \sigma_T)$, $T^* \sim N(\mu_{T^*}, \sigma_{T^*})$, 且两者相互独立。由正态变量的再生性, 可得热可靠性功能函数 Y 亦服从正态分布, 即 $Y \sim N(\mu_Y, \sigma_Y)$, 且均值 $\mu_Y = \mu_{T^*} - \mu_T$, 均方差 $\sigma_Y = (\sigma_{T^*}^2 + \sigma_T^2)^{1/2}$ 。则利用可靠性理论的一次二阶矩法, 热可靠性指标 β 可表示为

$$\beta = \Phi^{-1}(P_Y) = \mu_Y / \sigma_Y \quad (9)$$

若给定 P_Y^* , 可得对应的给定可靠性指标 β^* 为

$$\beta^* = \Phi^{-1}(P_Y^*) \quad (10)$$

由文献[13]可得可靠性安全系数 K_{op} 为

$$K_{\text{op}} = \frac{[1 + \beta^*(\gamma_{T^*}^2 + \gamma_T^2 - \beta^* \gamma_{T^*} \gamma_T)^{1/2}]}{(1 - \beta^{*2} \gamma_{T^*}^2)} \quad (11)$$

其中, $\gamma_T = \frac{\sigma_T}{\mu_T}$ 为温度场 T 的变异系数; $\gamma_{T^*} = \frac{\sigma_{T^*}}{\mu_{T^*}}$ 为临界温度 T^* 的变异系数。

在 K_{op} 的计算式中, 由于计及了 T 和 T^* 的一阶和二阶矩以及给定的可靠性指标 β^* 的影响, 故 K_{op} 含义已不同于传统的中心安全系数, 其值实质上是与给定的可靠度 P_Y^* 相对应安全系数。

仿照传统的安全系数法设计准则, 以可靠性中心安全系数 K_{op} 给出的安全设计准则为:

$$\mu_{T^*} \geq K_{\text{op}} \mu_T \quad (12)$$

此式即为热可靠性约束的等价显式化式, 仅用此式替换原结构拓扑优化模型(式(8))中热可靠性约束, 其它表达式不变, 即得到以常规约束形式表达的随机参数结构热拓扑优化设计数学模型, 该模型既包涵原有的热可靠性设计要求, 其表达式又相对简洁、易于求解。

由于 MMA 方法用于连续体结构的拓扑优化问题时, 将结构响应函数对变量的倒数在当前设计点处进行一阶泰勒展开, 进行凸线性显式化近似, 用一系列凸显式化子问题来近似原问题, 然后利用对偶方法或初始对偶内点算法求解凸线性显式化子问

题, 以移动近似子问题的解来逼近原问题的解。此方法适于处理目标函数复杂且具有多约束的拓扑优化问题, 并具有较好的适定性。故本文利用了 MMA 方法对以上拓扑优化模型求解。

3 算例

图 1 所示的整板均匀加热的方形平板结构, 被离散为 40×40 个四节点四边形单元。导热系数为 $\lambda \sim N(1.0, 0.05) \text{ W}/(\text{mm} \cdot ^\circ\text{C})$, 热源强度为 $q \sim N(1, 0.05) \text{ W}/\text{mm}^2$, 给定板上各点的临界温度为 $T^* \sim N(100, 5)^\circ\text{C}$, 给定体积比 $V^* = 0.4$ 。求该结构在如下两种工况中的基于热可靠性的最佳散热拓扑分布。

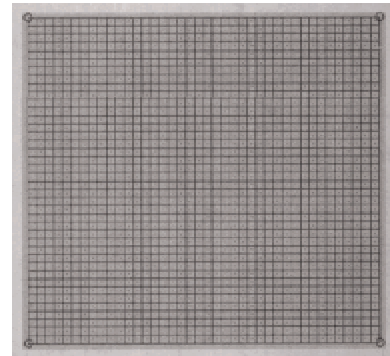


图 1 结构优化模型

工况 1: 给定结构左边界中点的温度随机变量为 $T_1^0 \sim (0, 0.05)^\circ\text{C}$, 其它边界为绝热边界; 给定热可靠度分别为 $P_{11}^* = 0.99$, $P_{12}^* = 0.999$ 。优化获得的最佳散热结构拓扑分布见图 2(a) 和图 2(b)。

工况 2: 给定结构左右边界的温度随机变量为 $T_2^0 \sim (0, 0.05)^\circ\text{C}$, 上下边界均为绝热边界; 给定热可靠度分别为 $P_{21}^* = 0.99$, $P_{22}^* = 0.999$ 。优化获得的最佳散热结构拓扑分布见图 2(d) 和图 2(e)。

为进行对比, 图 2(c) 和图 2(f) 分别给出了文献[2]对本例的工况 1 和工况 2 未考虑热可靠性约束(确定性模型)的拓扑优化结果。

算例的拓扑优化图形显示, 优化后结构的导热材料将呈树状分布。在绝热边界处, 导热材料稀疏, 类似于细小的分支; 在靠近温度最低点的边界处, 导热材料分布密集, 图形由细小分支变成粗大的树干。根据仿生学, 细小树枝吸收的热量, 汇总到较粗树干, 随着树干的加粗, 所要传递的热量也就增加, 最终汇总到低温边界, 由边界处将热量散发出去, 从而达到散热降温的效果。显然, 文中优化后的导热

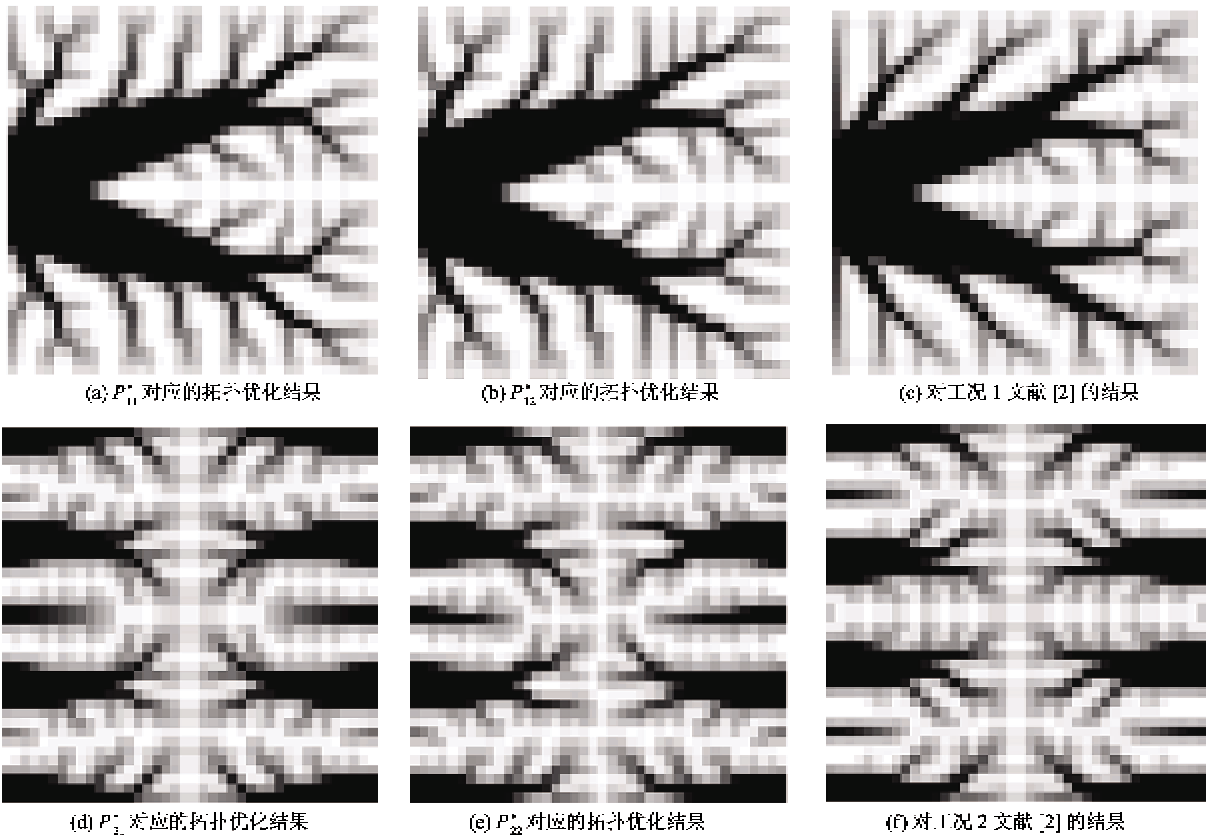


图 2 优化结果

材料呈树状分布,具有良好的散热效果,且与文献[1]中的结论相符,与文献[2]对相同算例的确定性拓扑优化模型所得的结果大致相同。相对文献[2]的优化结果,本文方法因为考虑了热可靠性的概率约束,所得的拓扑优化图形的分散性更强,导热材料分布更加均匀,加大了细小树枝吸收热量的效果,树干相对也要粗壮一些,则更利于导热与散热。

表 1 为本文与文献[2]对两算例的目标函数均值(结构的最小散热弱度值)和结构中最高温度均值的优化设计结果。从中可见,考虑热可靠性约束后目标函数,即结构总散热弱度的均值更小了,结构中最高温度的均值更低了,则可进一步提高结构的散热效果,减小了结构中电子元器件热失效的可能性。

表 1 算例的目标函数值

	随机性模型 $P = 0.99$ 的优化结果	随机性模型 $P = 0.999$ 的优化结果	确定性模型 的优化结果 ^[2]
工况 1 目标函数均值(W)	367.5604	337.5621	447.9944
工况 2 目标函数均值(W)	66.3719	60.7117	85.8828
工况 1 最高温度均值(℃)	48.7626	45.1829	54.0662
工况 2 最高温度均值(℃)	13.6986	12.1304	15.5069

4 结 论

- (1) 研究表明,对含有随机参数的连续体结构进行导热拓扑优化时,若考虑了热可靠性约束,所建的拓扑优化模型会更具有一般性,更符合工程实际。
- (2) 在拓扑优化之前,对热可靠性概率约束函

数进行显式化处理,可简化模型和计算量。

(3) 算例结果显示,基于热可靠性的最优结构拓扑与已有文献给出的确定性模型的优化结果相似,且材料密度呈树状分布的更加均匀,从而使结构的散热效果更好,这表明本文给出的模型具合理性,给出的方法具有有效性。

参考文献

- [1] Snider A D. General extended surface analysis method. *Journal of heat Transfer*, 1981, 103(4): 699-704
- [2] Bendsoe M P, Sigmund O. *Topology Optimization: Theory, Methods and Applications*, New York: Springer, 2003
- [3] Silva AKD, Vasile C, Bejan A. Disc cooling with high-conductivity inserts that extend inward from the perimeter. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 2004, 47(19-20): 4257-4263
- [4] Rocha L, Lorente S, Bejan A. Conduction tree networks with loops for cooling a heat generating volume, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 2006, 49(15-16): 2626-2635
- [5] Mathieu-Potvin F, Gosselin L. Optimal conduction pathways for cooling a heat generating body: A comparison exercise. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 2007, 50(5-16): 2996-3006
- [6] 李冬梅, 张宪民, 王念峰等. 基于可靠性约束的热固耦合结构拓扑优化. 华南理工大学学报(自然科学版), 2011, 39(6): 42-46
- [7] 邝泳聪, 欧阳高飞, 张宪民. 基于可靠性的连续体结构拓扑优化设计. 机械强度, 2009, 31(4): 604-608
- [8] 龙凯, 左正兴. 稳态热传导下的连续体结构拓扑优化. 中国机械工程, 2007, 18(24): 2939-2943
- [9] 张晖, 刘树田, 张雄. 拓扑相关热载荷作用下稳态热传导结构拓扑优化. 中国机械工程, 2009, 20(11): 1339-1343
- [10] 刘国梁, 陈建军, 马洪波. 一种基于非概率可靠性的结构水平集拓扑优化. 工程力学, 2012, 29(6): 58-62
- [11] 刘书田, 贺丹. 渐进密度 AESO 方法及其在热传导结构拓扑优化中的应用. 计算力学学报, 2009, 26(2): 151-156
- [12] 邱海平. 电子元器件及仪器的热控制技术. 北京: 电子工业出版社, 1991
- [13] 陈建军, 段宝岩, 张驰江. 结构可靠性优化中概率约束的等价显式处理. 西安电子科技大学学报, 1999, 26(5): 564-569

Heat conduction topology optimization of continuous structures based on thermal reliability

Liu Guoliang, Chen Jianjun, Ma Hongbo

(Key Laboratory of Electronic Equipment Structure Design, Ministry of Education, Xidian University, Xi'an 710071)

Abstract

The study aimed to optimize the heat conduction topology of continuous structures with random parameters based on thermal reliability. In the thermal analysis of a continuum structure, the coefficient of thermal conductivity, the intensity of internal heat source and the amplitude of distribution function for given boundary temperature were treated as random parameters. The numeric characteristic of the structural random temperature field was derived, and the thermal reliability definition was given, according to which random temperature variables can not exceed their critical values. The topology optimization model of the structure was built, in which minimizing the mean value of heat dissipation is taken as the objective function, and the given thermal reliability and the structural volume ratio as the constraints. The probability constraint function of thermal reliability was transformed into an explicit function which can simplify the topology model. The method of moving asymptotes was used to solve this topology optimization problem. Some examples verified the effectiveness and feasibility of the proposed method.

Key words: random, heat conduction, reliability, topology optimization, method of moving asymptotes (MMA)