

寻的导弹范数型微分对策制导律^①花文华^② 孟庆龄 张拥军

(中国空空导弹研究院 洛阳 471009)

摘 要 为改进寻的导弹拦截性能,基于微分对策理论推导了一种一般形式的范数型微分对策制导律(NDGL),该制导律可适用于拦截导弹和目标具有任意阶控制的情形。针对该制导律的三种典型形式及其对策空间进行了分析和研究,并提出了 NDGL 的一种延迟补偿改进形式。该改进 NDGL 利用目标姿态信息对加速度不确定集进行实时调整,进一步削弱了估计延迟对系统性能的影响。分别对完全信息情形下的一般形式 NDGL 和非完全信息情形下的四种典型 NDGL 的性能进行了仿真研究和比较,结果验证了该一般形式 NDGL,表明了所给出的改进 NDGL 的拦截性能优势。

关键词 末制导律,微分对策,延迟补偿,不确定集,目标拦截

0 引言

近年来微分对策理论在飞行器姿态控制^[1]、威胁规避^[2]、火力分配^[3]、目标拦截^[4,5]等方面得到了较为广泛的研究。在目标拦截中,目标因其独立性,其机动策略一般是无法预测的,因此将拦截情形定义为最优控制问题并不合适^[6],而对于微分对策双边优化问题而言,双方都是独立控制的,一方要求性能指标的最大化,而另一方要求性能指标的最小化,相比较而言更为合理。且相比于最优制导律,微分对策制导律对于目标机动估计误差具有更强的鲁棒性^[7]。范数型微分对策制导律(norm differential game guidance law, NDGL)是一种典型的微分对策制导律(DGL),主要适用于具有有界控制和采用零效脱靶量性能指标的零和微分对策拦截情形。相比于其它类型的微分对策制导律,NDGL 直接考虑到了拦截导弹有限的机动能力。该类型制导律具有结构简单、易于执行的特点。本研究首先考虑具有任意阶控制的拦截导弹和目标情形,从一般意义上对 NDGL 进行了推导,并对三种典型形式及其对策空间进行了研究,其次,通过对目标加速度不确定集和符号的判断,提出了一种改进的延迟补偿 NDGL,为验证其性能,进行了非完全信息(non-perfect infor-

mation)情况下的仿真和分析。

1 问题描述及建模

制导末端的弹目运动关系如图 1 所示, X 轴沿初始视线方向,下标 P 和 E 分别对应拦截导弹和目标的相关状态, y 表示拦截导弹和目标相对于初始视线方向的位移。基于下述假设进行问题的分析:

- (1) 拦截导弹和目标可近似为具有线性动态特性的质点,并可沿初始视线方向进行线性化;
- (2) 拦截导弹和目标速度大小不变且横向加速度有界 $|a_i| \leq a_i^{\max} (i = P, E)$, 导弹机动能力大于目标;
- (3) 拦截导弹和目标控制系统动态满足最小相位特性。

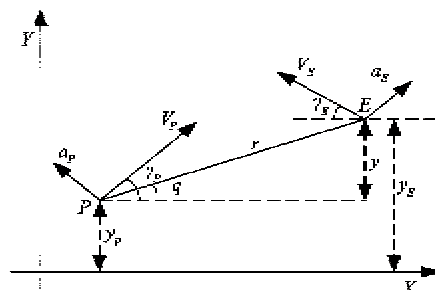


图 1 平面相对运动关系

① 航空科学基金(20110112001)重点资助项目。

② 男,1983 年生,工程师,博士;研究方向:飞行器制导与控制;联系人,E-mail: huawh6611@163.com
(收稿日期:2012-05-14)

基于图 1 和假设(1),拦截导弹和目标相对运动关系可近似表示为

$$\dot{y}(t) = v(t) \quad y(0) = 0 \quad (1)$$

$$\dot{v}(t) = a_E(t) - a_P(t) \quad (2)$$

$$v(0) = V_E \gamma_E(0) - V_P \gamma_P(0)$$

假设拦截导弹自动驾驶仪控制阶数为 n , 则其控制系统动态可表示为

$$\begin{bmatrix} \dot{a}_P(t) \\ \dot{\mathbf{p}}_P(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_P(t) \\ \mathbf{p}_P(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ \mathbf{b}_2 \end{bmatrix} u_{Pc}(t) \quad (3)$$

其中, a_P 为导弹加速度, $\mathbf{p}_P$ 为其余的 $(n-1)$ 个状态变量, a_{11} 和 b_1 为标量, a_{21} 、 a_{12}^T 和 $\mathbf{b}_2$ 为 $(n-1) \times 1$ 的向量, a_{22} 为 $(n-1) \times (n-1)$ 的矩阵, 基于假设式(3), b_1 , $\mathbf{b}_2 \geq 0$, u_{Pc} 为控制命令。参考拦截导弹控制系统动态定义, 具有 m 阶的目标控制系统可表示为

$$\begin{bmatrix} \dot{a}_E(t) \\ \dot{\mathbf{p}}_E(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_E(t) \\ \mathbf{p}_E(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d_1 \\ \mathbf{d}_2 \end{bmatrix} u_{Ec}(t) \quad (4)$$

其中, d_1 , $\mathbf{d}_2 \geq 0$, u_{Ec} 为目标控制命令。

选取状态变量 $\mathbf{x} = [y \quad v \quad a_E \quad \mathbf{p}_E \quad a_P \quad \mathbf{p}_P]^T$, 则系统状态方程可表示为

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_P u_{Pc}(t) + \mathbf{B}_E u_{Ec}(t) \quad (5)$$

$$\text{其中 } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & c_{11} & c_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_{21} & c_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{11} & a_{12} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \mathbf{B}_P = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ b_1 \\ \mathbf{b}_2 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B}_E = [0 \quad 0 \quad d_1 \quad \mathbf{d}_2^T \quad 0 \quad 0]^T。$$

基于假设(1)和假设(2), 拦截导弹飞行时间为

$$t_f \approx r_0/V_c \quad (6)$$

其中, r_0 为弹目初始距离, V_c 为接近速度, 近似为 $(V_P + V_E)$ 。待飞时间可表示为

$$t_{go} = t_f - t \quad (7)$$

2 范数型微分对策制导律

2.1 一般形式 NDGL

定义性能指标

$$J = |z(t)| \quad (8)$$

其中, $z(t)$ 表示零效脱靶量。对于双边优化微分对

策制导问题, $z(t)$ 表示拦截导弹和目标由给定的时间 t 起不施加任何控制, 以该瞬时参数飞行, 至命中时, 所产生的脱靶量。结合式(5), $z(t)$ 可表示为

$$z(t) = \kappa(t)\mathbf{x}(t) \quad (9)$$

其中,

$$\begin{aligned} \kappa(t) &= \mathbf{D}\Phi(t_f, t) \\ &= \mathbf{D}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{\mathbf{X}(s)}{\mathbf{x}(0)}\right)\Bigg|_{t_{go}} \\ &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\gamma(s)}{\gamma(0)} \frac{y(s)}{v(0)} \frac{a_E(s)}{a_E(0)} \frac{p_E(s)}{p_E(0)} \frac{a_P(s)}{a_P(0)} \frac{p_P(s)}{p_P(0)}\right]\Bigg|_{t_{go}} \\ &= \left[1 \quad t_{go} \quad \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2} \frac{a_E(s)}{a_E(0)}\right)\Bigg|_{t_{go}} \quad \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2} \frac{a_P(s)}{p_P(0)}\right)\Bigg|_{t_{go}} \right. \\ &\quad \left. \mathcal{L}^{-1}\left(-\frac{1}{s^2} \frac{a_P(s)}{a_P(0)}\right)\Bigg|_{t_{go}} \quad \mathcal{L}^{-1}\left(-\frac{1}{s^2} \frac{a_P(s)}{p_P(0)}\right)\Bigg|_{t_{go}}\right] \quad (10) \end{aligned}$$

$\mathbf{D} = [1 \quad 0 \quad 0 \quad \mathbf{0}_{1 \times (m-1)} \quad 0 \quad \mathbf{0}_{1 \times (n-1)}]$, $\Phi(t_f, t)$ 为相应于系统(5)的状态转移矩阵, $\gamma(s)/\mathbf{x}(0)$ 表示 $\gamma(s)$ 为对于各初始状态的响应, $\mathcal{L}^{-1}$ 表示拉氏反变换。

对式(9)两边关于时间 t 求导, 可以得到

$$\begin{aligned} \dot{z}(t) &= \kappa(t)\mathbf{B}_P u_{Pc} + \kappa(t)\mathbf{B}_E u_{Ec} \\ &= -\left[b_1 \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2} \frac{a_P(s)}{a_P(0)}\right)\Bigg|_{t_{go}} + \mathbf{b}_2 \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2} \frac{a_P(s)}{p_P(0)}\right)\Bigg|_{t_{go}}\right] u_{Pc} \\ &\quad + \left[d_1 \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2} \frac{a_E(s)}{a_E(0)}\right)\Bigg|_{t_{go}} + \mathbf{d}_2 \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2} \frac{a_E(s)}{p_E(0)}\right)\Bigg|_{t_{go}}\right] u_{Ec} \quad (11) \end{aligned}$$

原系统被降阶为以零效脱靶量作为变量的标量形式。文献[8]基于对最优控制理论的分析, 给出了相似的变换过程, 称为终端投射变换。基于式(11), 构造哈密顿函数

$$H = \lambda(\kappa(t)\mathbf{B}_P u_{Pc} + \kappa(t)\mathbf{B}_E u_{Ec}) \quad (12)$$

其中, λ 为待定的拉格朗日乘子。进一步, 由协态方程和横截条件可以得到

$$\dot{\lambda}(t) = -\frac{\partial H}{\partial z} = 0 \quad \lambda(t_f) = \text{sign}(z(t)) \quad (13)$$

由于假设拦截导弹和目标的控制系统都是最小相位的, 其斜坡响应是单调增加的^[9], 满足

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2} \frac{a_P(s)}{a_P(0)}\right)\Bigg|_t, \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2} \frac{a_P(s)}{p_P(0)}\right)\Bigg|_t > 0 \quad (14)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2} \frac{a_E(s)}{a_E(0)}\right)\Bigg|_t, \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2} \frac{a_E(s)}{p_E(0)}\right)\Bigg|_t > 0 \quad (15)$$

因此, 基于上述条件, 具有一般形式的 NDGL 可以表示为

$$u_{Pc}^* = \arg \min_{u_{Pc}} H = a_P^{\max} \text{sign}(z(t)) \quad (16)$$

$$u_{Ec}^* = \arg \max_{u_{Ec}} H = a_E^{\max} \text{sign}(z(t)) \quad (17)$$

式(16)和式(9)即构成了拦截导弹一般形式 NDGL,可适用于拦截导弹和目标具有任意阶控制系统动态的情形,而式(17)和式(9)也构成了目标的最优规避策略。基于微分对策理论,推导了这一追逃问题的极大极小值解(minimax solution),极小值对应于拦截导弹的制导律或拦截策略,而极大值对应于目标的最优规避策略。这一推导过程基于理想信息情形的假设,主要包括两部分内容:(1)对策双方都完全了解当前相对运动情形;(2)对策双方都可以对相关状态进行无噪声下的量测。第(2)部分内容对于拦截导弹而言是最坏情况。在实际战场情形下,被拦截导弹往往只能够完成单一的攻击任务,对于拦截导弹的相关状态是无法进行量测的,即使能够意识到被拦截导弹锁定,也只能采用随机的规避机动(相对于拦截导弹而言),与最优规避策略恰好吻合的概率很小,甚至接近于零。

2.2 三种典型的 NDGL

DGL/0^[10], DGL/1^[11] 和 DGL/C (compensated)^[12] 为三种典型的 NDGL。而其主要不同在于具有不同的控制系统动态或信息模式假设:DGL/0 假设拦截导弹和目标分别具有一阶和理想控制系统动态,DGL/1 假设拦截导弹和目标都具有一阶控制系统动态,且二者都基于当前状态是完全可观测的假设;与 DGL/1 相同,DGL/C 也假设拦截导弹和目标都具有一阶控制系统动态,但当前状态信息是部分可观的:目标加速度信息观测具有延迟,而其它状态是即时可观的。

结合式(5),以 DGL/1 为例,系统状态方程可表示为

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}_1 \mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_{p1} u_{pc}(t) + \mathbf{B}_{e1} u_{ec}(t) \quad (18)$$

$$\text{其中, } \mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1/\tau_E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1/\tau_P \end{bmatrix}, \mathbf{B}_{p1} =$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1/\tau_P \end{bmatrix}, \mathbf{B}_{e1} = [0 \ 0 \ 1/\tau_E \ 0]^T, \tau_P \text{ 和 } \tau_E \text{ 分别为}$$

拦截导弹和目标的机动时间常数。求解式(9),可以得到

$$\mathbf{z}(t) = \begin{cases} \mathbf{z}_0 = \mathbf{z}_0(t) \mathbf{x}(t) & \text{DGL/0} \\ \mathbf{z}_1 = \mathbf{z}_1(t) \mathbf{x}(t) & \text{DGL/1} \end{cases} \quad (19)$$

其中,

$$\mathbf{z}_0(t) = [1 \ t_{go} \ 0 \ -\psi(\tau_P)] \quad (20)$$

$$\mathbf{z}_1(t) = [1 \ t_{go} \ \psi(\tau_E) \ -\psi(\tau_P)] \quad (21)$$

$$\psi(\tau) = \tau^2 (\exp(-t_{go}/\tau) + t_{go}/\tau - 1) \quad (22)$$

将式(4)进一步转化为以下形式:

$$\dot{\mathbf{x}}_E(t) = \mathbf{A}_E \mathbf{x}_E(t) + \mathbf{B}_E u_{Ec}(t) \quad (23)$$

$$\text{其中, } \mathbf{x}_E = \begin{bmatrix} a_E \\ p_E \end{bmatrix}, \mathbf{A}_E = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix}, \mathbf{B}_E = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix}.$$

求解式(23),得

$$\mathbf{x}_E(t) = \exp(\mathbf{A}_E \delta) \mathbf{x}_E(t - \delta) + \int_{t-\delta}^t \exp(\mathbf{A}_E(t - \tau)) \mathbf{B}_E u_{Ec}(\tau) d\tau \quad (24)$$

其中, $0 < \delta < t$ 。将 $u_{Ec} = \pm a_E^{\max}$ 分别代入式(24),可以得到

$$\mathbf{x}_E^{r\max}(t) = \exp(\mathbf{A}_E \delta) \mathbf{x}_E(t - \delta) + a_E^{\max} (1 - \exp(\mathbf{A}_E \delta)) \quad (25)$$

$$\mathbf{x}_E^{r\min}(t) = \exp(\mathbf{A}_E \delta) \mathbf{x}_E(t - \delta) - a_E^{\max} (1 - \exp(\mathbf{A}_E \delta)) \quad (26)$$

因此,对于具有延迟的目标加速度信息有

$$\mathbf{x}_E^{r\min}(t) \leq \mathbf{x}_E(t) \leq \mathbf{x}_E^{r\max}(t) \quad (27)$$

$\mathbf{x}_E(t)$ 采用由信息延迟产生的可达集(不确定集) $R_s: [\mathbf{x}_E^{r\min}, \mathbf{x}_E^{r\max}]$ 的中心值代替

$$\mathbf{x}_E^c(t) = (\mathbf{x}_E^{r\min}(t) + \mathbf{x}_E^{r\max}(t))/2 = \exp(\mathbf{A}_E \delta) \mathbf{x}_E(t - \delta) \quad (28)$$

假设拦截导弹和目标都具有一阶控制系统动态,可达集 $R_s: [\mathbf{x}_E^{r\min}, \mathbf{x}_E^{r\max}]$ 可进一步表示为

$$a_E^{r\max}(t) = a_E(t - \delta) \exp(-\delta/\tau_E) + a_E^{\max} (1 - \exp(-\delta/\tau_E)) \quad (29)$$

$$a_E^{r\min}(t) = a_E(t - \delta) \exp(-\delta/\tau_E) - a_E^{\max} (1 - \exp(-\delta/\tau_E)) \quad (30)$$

$$a_E^c(t) = a_E(t - \delta) \exp(-\delta/\tau_E) \quad (31)$$

则存在信息延迟情形下的零效脱靶量可表示为

$$\mathbf{z}_c(t) = \mathbf{z}_c(\delta, t) \mathbf{x}(t) \quad (32)$$

其中,

$$\mathbf{z}_c(\delta, t) = [1 \ t_{go} \ \psi(\tau_E) \exp(-\delta/\tau_E) \ -\psi(\tau_P)] \quad (33)$$

该制导律即为另一种典型的范数型微分对策制导律 DGL/C^[12],其中, δ 对应假设的目标加速度信息延迟。由式(33)可以看出,当 $\delta \rightarrow \infty$ 时,DGL/C 等价于 DGL/0,而当 $\delta \rightarrow 0$ 时 DGL/C 等价于 DGL/1,因此延迟补偿的大小也决定了这一微分对策制导律的性能。为进一步改进寻的导弹的拦截性能,文献[12]针对一类具有一次随机时间切换的“bang-bang”类型目标机动,研究其最坏情形下的规避策略

并采用相应的延迟补偿,从而降低峰值脱靶量。由式(17)以及文献[13]的研究结果,该“bang-bang”类型的目标机动是最优的。

3 NDGL 对策空间分析

为便于对策空间分析,将式(19)第二项两边关于 $\theta = t_{go}/\tau_p$ 求导,并带入式(16)和式(17),可以得到^[12]

$$\frac{dz_1}{d\theta} = \Gamma_1(\theta) \text{sign}(z_1) \quad (34)$$

其中,

$$\Gamma_1(\theta) = \mu\phi(\theta) - \varepsilon\phi(\theta/\varepsilon) \quad (35)$$

$$\phi(\alpha) = \exp(-\alpha) + \alpha - 1 \quad (36)$$

$\mu = a_p^{\max}/a_e^{\max}$ 为拦截导弹和目标的机动性能比, $\varepsilon = \tau_e/\tau_p$ 为目标和拦截导弹的控制系统时间常数比。对于由式(18)、(16) 和(19)所构成的 NDGL DGL/1, 对策空间被分为两个区域, 如图 2 所示。在区域 D_1 内, 拦截导弹的最优制导策略为如式(16)所示的“bang-bang”结构, 而在区域 D_0 内(大多数实际情况), 拦截导弹最优制导策略是任意的且对策值为常值, 即

$$M_1 = -\mu\phi(\theta_1) + \varepsilon^2\phi(\theta_1/\varepsilon) + (\mu - 1)\theta_1^2/2 \quad (37)$$

其中, θ_1 满足方程

$$\Gamma_1(\theta) = 0 \quad (38)$$

同时也对应 $\Gamma_1(\theta)$ 取得最小值时的点。

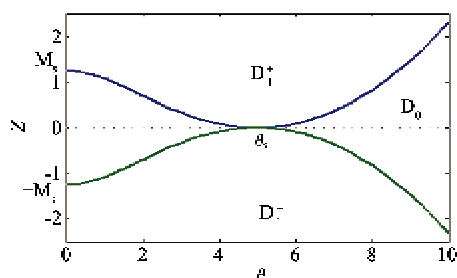


图2 NDGL:DGL/1 对策空间分解, $\mu \approx 1.2, \varepsilon = 0.25$

对 $\Gamma_1(\theta)$ 两边关于 θ 求导, 进一步可以得到

$$\mu(1 - \exp(-\theta)) - (1 - \exp(-\theta/\varepsilon)) = 0 \quad (39)$$

联立式(38)和(39)并经过化简, 得

$$(\mu - \varepsilon\mu)\phi(\theta) + (\varepsilon\mu - 1)\theta = 0 \quad (40)$$

因此, 由式(40)可以得到对策值为零的条件为

$$\begin{cases} \varepsilon \geq 1 & \text{或} & 0 < \varepsilon < 1 \\ \varepsilon\mu \geq 1 & & 0 < \varepsilon\mu < 1 \end{cases} \quad (41)$$

文献[12]基于仿真所给出的对策值为零的条件: $\varepsilon\mu \geq 1$ 并不充分, 图3为 $\mu = 0.5$ 和 $\varepsilon = 0.25$ 情况下的对策空间, 对策值趋于零, 而图4为 $\mu = 0.25$ 和 $\varepsilon = 8$ 情况下的对策空间, $\varepsilon\mu = 2$, 但出现了共轭点。由图可见, 只有当近似 $\theta < 4.5$ 时, 才存在最优弹道使得对策值收敛到零。

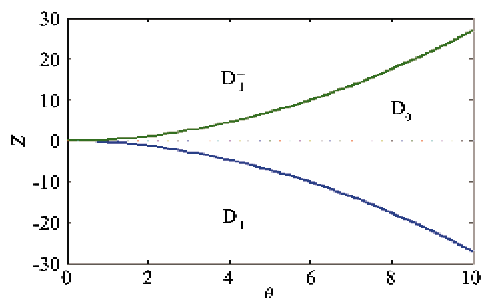


图3 NDGL:DGL/1 对策空间分解, $\mu = 0.5, \varepsilon = 0.25$

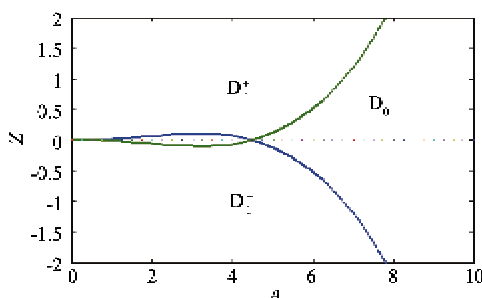


图4 NDGL:DGL/1 对策空间分解, $\mu = 0.25, \varepsilon = 8$

进一步化简式(40), 可以得到

$$\exp(-\theta) + \rho\theta - 1 = 0 \quad (42)$$

其中, $\rho = (1 - \mu)/(\mu - \varepsilon\mu)$, θ_1 也可由式(42)确定。

对式(32)两边关于 θ 求导, 并带入式(16)和式(17), 可以得到

$$\frac{dz_c}{d\theta} = \Gamma_c(\theta) \text{sign}(z_c) \quad (43)$$

其中,

$$\begin{aligned} \Gamma_c(\theta) = & \mu\phi(\theta) - \varepsilon\phi(\theta/\varepsilon)\exp(-\Delta\theta_{\text{est}}/\varepsilon) \\ & + \theta[\exp(-\Delta\theta_{\text{est}}/\varepsilon) - 1] \end{aligned} \quad (44)$$

$\Delta\theta_{\text{est}} = \delta/\tau_p$ 。进一步可以转化为

$$\begin{aligned} \Gamma_c(\theta) = & \Gamma_1(\theta) - \varepsilon[\exp(-\theta/\varepsilon) - 1] \\ & [\exp(-\Delta\theta_{\text{est}}/\varepsilon) - 1] \end{aligned} \quad (45)$$

由式(45)知, 基于式(41)选取适当的参数使得 DGL/1 的对策值趋于零时, DGL/C 所对应的对策值

由于考虑到估计延迟的影响,最终的对策值将不为零,也就是说在完全信息情况下,DGL/C 具有非零的脱靶量。对于 DGL/0 而言,由于未考虑到目标的控制系统动态,脱靶量也不为零,如下式所示:

$$\frac{dz_0}{d\theta} = \Gamma_0(\theta) \text{sign}(z_0) \quad (46)$$

$$\Gamma_0(\theta) = \Gamma_1(\theta) + \varepsilon[\exp(-\theta/\varepsilon) - 1] \quad (47)$$

对于三种 NDGL 在非完全信息情形下的性能比较,将结合下文给出的一种改进的延迟补偿微分对策制导律在仿真部分展开。

4 一种改进的 NDGL

在 DGL/C 的设计中,采用由信息延迟产生的不确定集 R_s 的中心值代替 $a_E(t)$,本文进一步利用目标姿态信息给出一种改进的 DGL/C。通过对 R_s 界值和目标加速度符号的判断,以给出适当的 $a_E^c(t)$ 代替 $a_E(t)$ 。主要分为以下两种情况:

$$(1) \text{sign}(a_E^{r\max}) = \text{sign}(a_E^{r\min})$$

此时, R_s 位于坐标轴的一侧,采用中心值代替 $a_E(t)$ 可以取得较好的延迟补偿效果,与 DGL/C 相同,即

$$a_E^c(t) = (a_E^{r\max} + a_E^{r\min})/2 \\ = a_E(t - \delta) \exp(-\delta/\tau_E) \quad (48)$$

$$(2) \text{sign}(a_E^{r\max}) \neq \text{sign}(a_E^{r\min})$$

当 $\text{sign}(a_E^{r\max}) \neq \text{sign}(a_E^{r\min})$ 时, R_s 的两个界值异号,子集 $[a_E^{r\min}, 0)$ 位于坐标轴零点左侧,另一子集 $[0, a_E^{r\max}]$ 位于坐标轴零点右侧(包括零点),此时不确定集的中心值 $a_E^c(t)$ 应根据 $a_E(t)$ 的符号进行选取才能取得较好的延迟补偿效果,定义为

$$a_E^c(t) = \frac{1}{2} a_E(t - \delta) \exp(-\delta/\tau_E) \\ + \frac{1}{2} \text{sign}(a_E(t)) a_E^{\max} (1 - \exp(-\delta/\tau_E)) \quad (49)$$

该改进微分对策制导律与 $a_E(t)$ 的符号相关。假设拦截导弹导引头可对目标的滚转角 ϑ 进行量测(如红外导引头通过计算机视觉技术),在目标进行水平协调转弯时,滚转角 ϑ 满足^[14]

$$\vartheta = \arctan(a_E/g) \quad (50)$$

其中, g 为重力加速度。通过式(50)即可进行目标加速度符号的判断。该改进的延迟补偿 NDGL 表示为 DGL/C2。

5 仿真结果及分析

如图 1 所示,针对一类末端迎面拦截情形进行了仿真研究,假设目标机动为具有一次时间切换的“bang-bang”类型, $\gamma_P(0) \approx 0$, $\gamma_E(0) \approx 0$, 其它仿真参数如表 1 所示。仿真主要包括完全信息情形下的高阶控制导弹一般形式 NDGL 验证和非完全信息情形下的四种典型 NDGL 的性能比较分析两部分。

表 1 仿真参数

参数	值
导弹飞行速度 V_P	700m/s
目标飞行速度 V_E	500m/s
导弹控制系统时间常数 τ_P	0.2s
目标控制系统时间常数 τ_K	0.2s
导弹最大机动性能 $a_P^{\max}$	20g
目标最大机动性能 $a_K^{\max}$	10g
弹目初始距离 r_0	3600m
过程噪声 σ_P, σ_K	0.1g, 1g
量测噪声 σ_q, σ_{op}	1mrad, 0.1g
目标加速度信息延迟假设 δ	0.3s

仿真 1:一般形式 NDGL 验证

假设高阶控制导弹传递函数为

$$\frac{a_P(s)}{u_{Pe}(s)} = \frac{s\tau_z + 1}{(s\tau_1 + 1)(s\tau_2 + 1)} \quad (51)$$

其中, $\tau_1, \tau_2, \tau_z > 0$, 系统是最小相位的。选取 a_P 为第一个状态变量,将式(51)改写为如式(3)所示的状态方程形式:

$$\begin{bmatrix} \dot{a}_P \\ \dot{p}_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 - a_1\tau_z/a_2 \\ -1/(a_2 - a_1\tau_z) & -a_1/a_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_P \\ p_m \end{bmatrix} \\ + \begin{bmatrix} \tau_z/a_2 \\ 1/a_2 \end{bmatrix} u_{Pe} \quad (52)$$

其中, $a_1 = \tau_1 + \tau_2$, $a_2 = \tau_1\tau_2$ 。进一步可以得到:

$$\frac{a_P(s)}{a_P(0)} = \frac{a_2s + a_1}{a_2s^2 + a_1s + 1} \quad (53)$$

$$\frac{a_P(s)}{p_m(0)} = \frac{a_2 - a_1\tau_z}{a_2s^2 + a_1s + 1} \quad (54)$$

假设目标具有一阶控制系统动态,则进一步结合式(16)和式(9),即可进行拦截导弹最优控制命令的计算,仿真中取 $\tau_1 = 0.05s$, $\tau_2 = 0.15s$, $\tau_z = 0.1s$,结果如图 5 和图 6 所示。图 5 为目标机动命令切换时间 $t_{sw} = 1.5s$ 时的脱靶量曲线,由图可见,可以实现目标的有效拦截,对于其它的 t_{sw} ,最终的

脱靶量也趋近于零,验证了该一般形式 NDGL。图 6 为该情形下的拦截导弹加速度变化曲线。

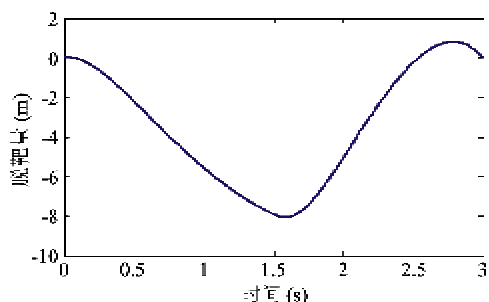


图 5 高阶控制拦截导弹脱靶量

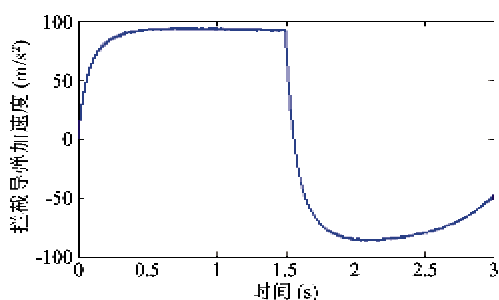


图 6 高阶控制拦截导弹控制量

仿真 2: 典型 NDGL 性能分析

在非完全信息情形下进行机动目标拦截的仿真框图如图 7 所示,包含噪声和相应的量测部分,因此应首先进行估计器和导弹拦截性能衡量指标的设计。

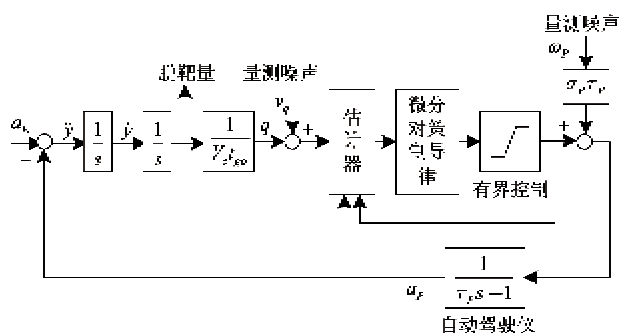


图 7 基于微分对策制导律的机动目标拦截框图

(1) 估计器设计

假设拦截导弹和目标具有相互独立的过程噪声且符合高斯分布,均值为零,标准方差分别为 σ_p 和 σ_v 。结合图 1 和图 7,采用一定的弹上量测设备可对弹目距离 r 、视线角 q 和导弹横向加速度 a_p 进行量测。假设 r 是可精确量测的, q 和 a_p 具有一定的量

测噪声,并且假设噪声为白噪声且符合高斯分布,标准方差分别为 σ_q 和 σ_{ap} 。量测方程表示为:

$$z(t) = \tilde{H}\hat{x}(t) + v(t) \quad (55)$$

其中, $\tilde{H} = \begin{bmatrix} 1/r & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, $v = \begin{bmatrix} v_r \\ v_{ap} \end{bmatrix}$ 为量测噪声。

由于考虑非完全信息情形,主要应用成型滤波器方法表示目标的随机机动策略,采用任意(不局限于白噪声)随机输入驱动整个系统,进而实现系统的扩展。对于随机时间转换的目标机动,成型滤波器设计为具有功率谱密度 $4(a_E^{\max})^2/t_f$ 的白噪声驱动积分环节,扩展后的系统,包括原系统和一个 SF,与原系统具有相同的一阶矩和二阶矩。基于式(18),经过扩展后的系统状态方程可以表示为

$$\dot{\hat{x}}(t) = \tilde{A}_1\hat{x}(t) + \tilde{B}_{p1}u_p^c(t) + \omega(t) \quad (56)$$

其中,

$$\hat{x} = \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \\ \hat{x}_3 \\ \hat{x}_4 \\ \hat{x}_5 \end{bmatrix}, \quad \tilde{A}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1/\tau_E & 0 & 1/\tau_E \\ 0 & 0 & 0 & -1/\tau_P & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\tilde{B}_{p1} = [0 \ 0 \ 0 \ 1/\tau_P \ 0]^T, \quad \omega = [0 \ 0 \ \omega_{ae} \ \omega_{ap} \ \omega_{aec}]^T \text{ 为过程噪声, } \hat{x}_5 \text{ 对应目标机动命令。}$$

(2) 性能衡量指标设计

在真实环境中,导弹在应对机动目标拦截时,其杀伤性能衡量一般十分复杂,很难予以准确描述,它除了依赖于精确的弹目相对运动关系,还取决于许多其它物理参数。对于基于质点运动假设的对象而言,在无其它终端约束时,脱靶量是唯一可用于导弹杀伤性能评估的信息。本文主要采用一个脱靶量阈值函数以确定目标的拦截概率:

$$P_i(\Delta) = \begin{cases} 1, & |x_1(t_f)| \leq \Delta \\ 0, & |x_1(t_f)| > \Delta \end{cases} \quad (57)$$

其中, Δ 是阈值,近似为导弹杀伤半径。这一性能指标十分严格,只有当最终的脱靶量小于 Δ 时,才能保证对于目标的拦截。

由于量测噪声和目标机动的随机性,脱靶量无法确定,是一个未知分布的随机变量。大量的 Monte Carlo 仿真实验可以实现脱靶量的累积概率分布函数的经验估计,从而进行不同制导律之间的拦截性能比较,因此,单发杀伤概率(single shot kill

probability, SSKP) 可以作为目标有效拦截所需概率的量测标准。SSKP 为 $P_s(\Delta)$ 的数学期望, 用下式表示:

$$\text{SSKP}(\Delta) = E\{P_s(\Delta)\} \quad (58)$$

SSKP 性能指标考虑到了量测噪声和随机目标机动的影响, 导弹要求 SSKP 的最大化, 而目标则要求 SSKP 的最小化。SSKP 可以用于说明对于给定的脱靶量, 命中目标的概率, 同样也可以用于说明对于给定的概率, 要求导弹命中目标所应具有的最小脱靶量。

非完全信息情形下的仿真结果如图 8 至图 12 所示。Kalman 滤波器可以实现估计误差的均方根最小, 然而当状态变量发生切变时, 例如“bang-bang”目标机动, 这一变量的估计误差会变大, 需要一定的时间才能够收敛到新值, 即存在估计延迟, 图 8 所示为 $t_{sw} = 1.5\text{s}$ 时的目标加速度估计结果。针对这一点, 考虑存在估计延迟的情况, 对四种典型 NDGL 的性能进行分析和比较。

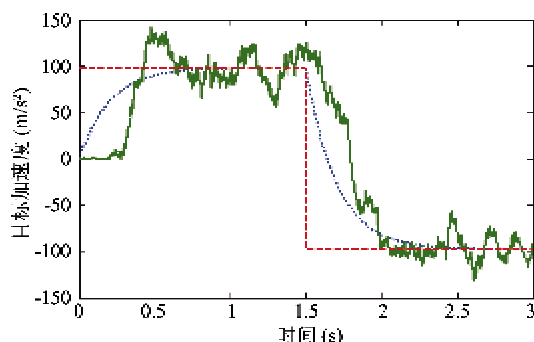


图 8 目标加速度闭环估计

图 9 为四种 NDGL 的脱靶量随目标机动命令切换时间的变化关系。从图中可以看出, 当滤波器具有足够的收敛时间时, DGL/1 具有最好的目标拦截性能, 但在 $t_{sw} = 2.3\text{s}$ 附近, 脱靶量则较大, 对于估计

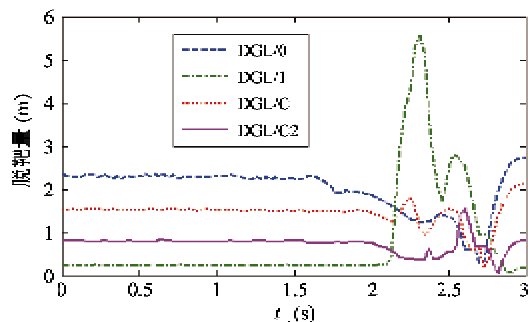


图 9 四种典型 NDGL 脱靶量与目标机动命令切换时间曲线

延迟的影响最为敏感; DGL/0 由于未考虑目标机动的影响, 在 $t_{sw} = 2.3\text{s}$ 附近的脱靶量则明显小于 DGL/1; DGL/C 的性能曲线介于 DGL/0 和 DGL/1 之间, 且最大脱靶量小于两者; 所给出的改进 NDGL DGL/C2 具有最小的最大脱靶量, 进一步削弱了估计延迟对系统性能的影响。

图 10 为基于 200 次 Monte Carlo 试验的四种 NDGL 的性能比较, 其所对应的滤波器采用相同的随机目标机动命令切换时间和噪声随机数产生器种子。由图可见, 对于给定的 SSKP, 例如 $\text{SSKP} = 0.95$, 四种 NDGL 的拦截性能由高到低依次为 DGL/C2、DGL/C、DGL/0 和 DGL/1, 采用 DGL/C2 所要求的弹头杀伤半径最小。

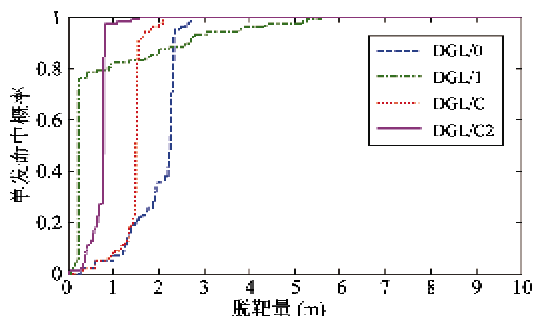


图 10 四种典型 NDGL 性能比较

图 11 为 DGL/C 和 DGL/C2 的脱靶量与延迟补偿大小之间的关系。基于目标姿态信息进行不确定集的调整, 对于较小的延迟补偿 DGL/C2 和 DGL/C 性能接近, 说明此时满足 $\text{sign}(a_E^{n\max}) = \text{sign}(a_E^{n\min})$, 但对于较大的估计延迟, DGL/C2 的性能则明显优于 DGL/C。当目标最大加速度存在不确定

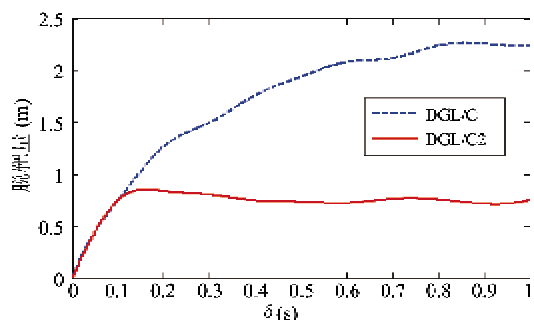


图 11 DGL/C 和 DGL/C2 脱靶量与延迟补偿大小的关系

性时, DGL/C2 的性能如图 12 所示。从图中可以看出, 三者性能比较接近, 对于目标加速度的过高或过低估计并不会产生较大的脱靶量, 具有一定的鲁棒性。

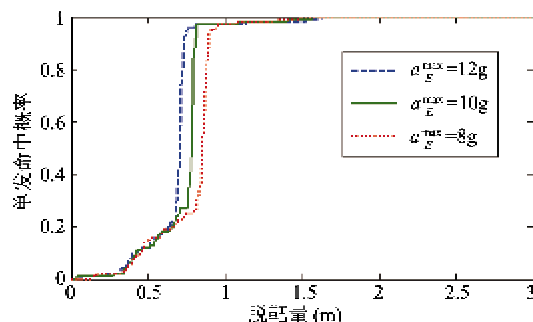


图 12 目标最大加速度存在不确定时的 DGL/C2 性能

6 结论

从一般意义上对 NDGL 进行了推导,该制导律可适用于具有任意阶控制的拦截导弹和目标情形。针对三种典型的 NDGL 进行了研究,给出了对策空间分析,并设计了一种改进的延迟补偿 NDGL。该改进 NDGL 基于目标姿态信息对目标加速度不确定集的中心值进行实时调整,进而进行控制命令的计算。分别针对完全信息情形下的高阶控制导弹一般形式 NDGL 和非完全信息情形下的四种 NDGL 的性能进行了仿真研究和比较,结果验证了该一般形式 NDGL,也表明了所给出的改进 NDGL 的拦截性能优势。

参考文献

- [1] 苏晓丹. 飞行器姿态控制系统综合的一种微分对策方法. 航天控制, 2009, 27(3): 72-75
- [2] 王长青, 史晓丽, 王新民等. 基于 LQ 微分对策的最优规避策略与决策算法. 计算机仿真, 2008, 25(9): 74-78
- [3] 李登峰, 罗飞. 舰艇编队信息战火力分配微分对策模型及求解. 控制理论与应用, 2008, 25(6): 1163-1166
- [4] 花文华, 陈兴林, 宋申民. 主动防御的协同微分对策制导. 高技术通讯, 2012, 22(1): 94-96
- [5] 花文华, 刘杨, 陈兴林等. 具有终端约束的线性二次型微分对策制导律. 兵工学报, 2012, 32(12): 1448-1455
- [6] Anderson G M. Comparison of optimal control and differential game intercept guidance laws. *Journal of Guidance and Control, and Dynamics*, 1981, 4(2): 09-115
- [7] Perekman A, Shima T, Rusnak I. Cooperative differential games strategies for active aircraft protection from a homing missile. *Journal of Guidance and Control, and Dynamics*, 2011, 34(3): 761-773
- [8] Bryson Jr A E, Ho Y C. *Applied Optimal Control: Optimization, Estimation, and Control*. Waltham, MA: Blaisdell, 1969. 148-176
- [9] Rusnak I, Lev M. Optimal guidance for high-order and acceleration constrained missile. *Journal of Guidance and Control, and Dynamics*, 1991, 14(3): 589-596.
- [10] Gutman S. On optimal guidance for homing missiles. *Journal of Guidance and Control, and Dynamics*, 1979, 2(4): 296-300
- [11] Shinar J. *Solution Techniques for Realistic Pursuit-Evasion Games*. New York: Academic Press, 1981. 63-124
- [12] Shinar J, Shima T. Nonorthodox guidance law development approach for intercepting maneuvering targets. *Journal of Guidance and Control, and Dynamics*, 2002, 25(4): 658-666
- [13] Shinar J, Turetsky V, Oshman Y. Integrated estimation/guidance design approach for improved homing against randomly maneuvering targets. *Journal of Guidance and Control, and Dynamics*, 2007, 30(1): 154-161
- [14] Oshman Y, Arad D. Enhanced air-to-air missile tracking using target orientation observations. *Journal of Guidance and Control, and Dynamics*, 2004, 27(4): 595-606

Norm differential game guidance laws for homing missiles

Hua Wenhua, Meng Qingling, Zhang Yongjun
(China Airborne Missile Academy, Luoyang 471009)

Abstract

According to the differential game theory, a general norm differential game guidance law (NDGL) was derived to improve the interception performance of homing missiles. This general guidance law is suitable for interception missiles and targets with arbitrary-order-control. Three available typical forms of this general guidance law were researched and their corresponding game spaces were analyzed. On the basis of target attitude information, a kind of improved delay-compensation NDGL was presented. This improved guidance law makes real-time adjustment of the target acceleration uncertainty set for control of command calculation to weaken the effects of estimation delay. Simulations were carried out for the general NDGL under perfect information and the four typical forms under non-perfect information. The simulation results verified the general NDGL and showed the performance advantages of the improved NDGL.

Key words: terminal guidance law, differential game, delay compensation, uncertainty set, target interception