

倾斜式双滚子包络环面蜗杆副承载能力研究^①柳在鑫^{②**} 王进戈^{*} 张均富^{*} 向中凡^{*}

(* 西华大学机械工程与自动化学院 成都 610039)

(** 四川大学制造科学与工程学院 成都 610065)

摘 要 为了评价倾斜式双滚子包络环面蜗杆传动的承载能力,提出了求解该传动齿间载荷分配和接触线上载荷分布的解析算法。根据倾斜式双滚子包络环面蜗杆传动的特点,在一定假设基础上建立了蜗杆副承载计算模型,以此为基础,确立了齿对载荷分配系数计算公式,并由布希涅斯克公式和有限差分法建立了该传动的接触线上载荷分布计算模型,在数值分析基础上,分析了滚柱偏距、滚柱半径、倾斜角等啮合参数对该传动齿间载荷分配与接触线上载荷分布的影响。研究表明:从啮入端到啮出端其齿间载荷分配呈抛物线变化规律;接触线上载荷分布从齿根到齿顶呈递减趋势。要使该传动保持良好的承载能力,滚柱偏距宜在 5cm~8cm 之间,滚柱半径在 7cm~9cm 之间,倾斜角在 8°~12°之间。

关键词 环面蜗杆, 载荷分配, 承载能力, 有限差分法

0 引言

倾斜式双滚子包络环面蜗杆传动是基于无侧隙双滚子包络环面蜗杆传动^[1]和滚锥包络环面蜗杆传动^[2]研究提出的一种新型传动。该传动制造安装方便,成本低,且传动性能好,能够用于精密分度和精密传动。

目前齿轮承载能力研究主要集中于渐开线齿轮、准双曲面齿轮和圆弧齿轮^[3,4]。文献[5]利用数值积分方法求解齿间载荷分配,Elkholy^[6]依据齿轮啮合刚度对齿轮进行了载荷分布与分配计算。Simon^[7]利用轮齿三维有限元挠曲变形及接触变形提出了一种载荷分配求解方法。文献[8]利用有限元素法研究了平面二次包络蜗杆传动的载荷分布。文献[9]将有限元挠曲变形与弹性接触变形结合起来求解平面二次包络蜗杆传动齿间载荷分配及接触线上载荷分布。文献[10,11]利用 2D 和 3D 齿轮接触有限元模型计算斜齿轮啮合刚度和载荷分布。迄今为止还没有严密的解析方法来建立环面蜗杆传动承载能力计算的理论公式。

倾斜式双滚子包络环面蜗杆传动属于瞬时多齿

啮合,且啮合齿面的相对法曲率半径很大。在载荷的作用下,轮齿的变形使接触区移动,接触状况发生变化,因此传动性能和不考虑载荷的几何分析的结果不同。本文在啮合分析的基础上,提出了一种求解倾斜式双滚子包络环面蜗杆传动齿间载荷分配与接触线上载荷分布的方法,并对该传动的载荷分配与分布进行了计算研究。研究齿间载荷分配及接触线上载荷分布对于分析倾斜式双滚子包络环面蜗杆传动的强度和润滑性能有着十分重要的意义。

1 计算模型

1.1 传动的工作原理

如图 1,蜗轮由周向均布有半径为 R 的滚子 1 的两半个蜗轮 2 和 3 构成,每排滚子与蜗轮中间平面偏离一定位置,滚子轴线与蜗轮径向偏转一定角度(如图 2),滚子可绕自身轴线转动。蜗杆左、右齿面分别与两半个蜗轮的滚子相啮合。单排滚子与蜗杆齿面之间存在一定齿侧间隙,保证了传动的正常工作和良好的润滑,但对整体而言,通过自动消除装置调节两半个蜗轮轮体的错位角度^[12],使滚子与蜗杆齿面始终保持接触,消除传动的回程误差。

① 国家自然科学基金(50775190)和四川省自然科学基金(12ZA284)资助项目。

② 男,1978 年生,副教授,博士生;研究方向:机械传动,机器人技术;联系人,E-mail: zhanxinliu@tom.com
(收稿日期:2012-07-19)

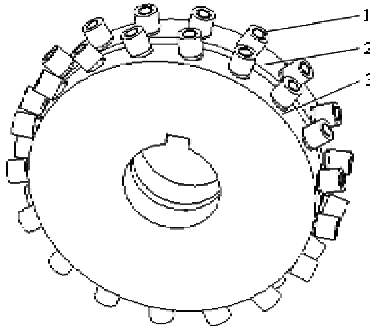


图1 蜗轮结构图

1.2 计算模型

由于倾斜式双滚子包络环面蜗杆传动为滚动摩擦,两啮合齿面间的摩擦力与沿两齿面公法线方向作用的作用力相对小很多,故在进行蜗轮副的力分析时忽略摩擦力,也能得到满足工程实际的结果。如图2,倾斜式双滚子包络环面蜗杆传动有齿对1、齿对2、齿对3三对齿同时啮合, T_1 、 T_2 分别为蜗杆和蜗轮的扭矩。将沿接触线分布的载荷离散成各接触点作用的载荷,只要接触线上的点足够多,简化是合理的。

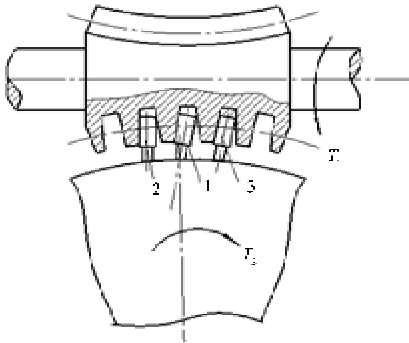


图2 承载计算模型

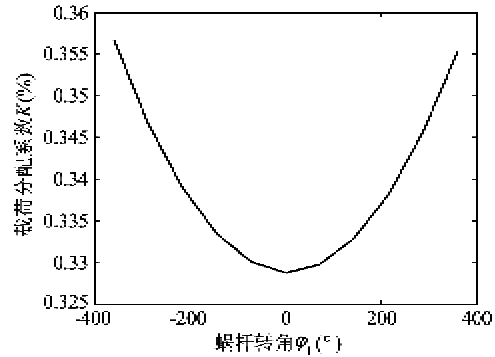
2 齿间载荷分配

倾斜式双滚子包络环面蜗杆传动处于不同转角位置时其承受的载荷是不同的,在蜗轮齿处于不同的位置转角时,其齿面接触线的位置、长度各不相同,而且不同位置对应着蜗杆和蜗轮的齿厚不同。由参考文献[13],该传动同时参与啮合的三对啮合齿对载荷分配系数之比为

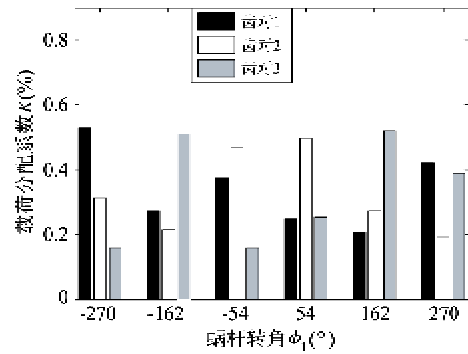
$$\begin{cases} K^{(1)}:K^{(2)}:K^{(3)} = \delta^{(1)}:\delta^{(2)}:\delta^{(3)} \\ \delta^{(i)} = \frac{1}{\frac{1}{E_1 s_{i1}^3} + \frac{1}{E_2 s_{i2}^3}} \end{cases} \quad (1)$$

式中: E_1 、 E_2 分别为蜗杆和蜗轮的弹性模量; s_{i1} 、 s_{i2} 分别为蜗杆和蜗轮的瞬时齿厚。

选取蜗杆头数 $Z_1 = 1$,蜗轮齿数 $Z_2 = 25$,中心距 $A = 125\text{mm}$,喉径系数 $K_l = 0.4$,图3为该实例的齿间载荷分配,下文计算都以该实例为准。



(a) 啮合齿对不同位置的载荷分配



(b) 不同位置的齿间载荷分配

图3 齿间载荷分配

从图3(a)可知,每一齿对从啮入端到啮出端其承载呈抛物线变化规律,在两端位置时承载比例大,中间位置承载比例小。由图3(b)可知,在 162° 时齿对受载最大,此时,齿对1承载占总载荷的22.584%,齿对2承载占总载荷的27.323%,齿对3承载占总载荷的50.093%。

3 接触线上载荷分布

3.1 计算方法

假定倾斜式双滚子包络环面蜗杆传动同时相啮合轮齿间的载荷以及各齿接触线上的载荷按使各接触点法向变形相同进行分配。该传动接触线上载荷分布与变形关系如下:

$$\begin{cases} \delta = (D_{ij})_{n \times n} F, i, j = 1, 2, \dots, n \\ \delta = (\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n)^T \\ F = (F_1, F_2, \dots, F_n)^T \\ D_{ij} = a_{ij} + b_{ij} + c_{ij} \end{cases} \quad (2)$$

其中: δ_i 为接触线上各接触点变形; F_i 为接触线上各接触点载荷; δ 为接触线上变形矩阵; F 为接触线上载荷矩阵; $(D_{ij})_{n \times n}$ 为蜗轮副柔度矩阵, D_{ij} 为在 j 处传递单位载荷时, i 处沿公法线方向的弹性变形; a_{ij} 为 j 处传递单位载荷时, 接触点 i 处的法向接触变形; b_{ij} 为 j 处传递单位载荷时, 因蜗轮齿的弯曲变形在接触点 i 处引起的法向变形; c_{ij} 为 j 处传递单位载荷时, 因蜗杆轴的挠曲变形在接触点 i 处引起的法向变形。为了蜗轮副保持接触和避免干涉, 则有

$$\delta_i = \delta_{i-1}, i = 1 \sim n \quad (3)$$

将式(2)代入(3)可得到 $n-1$ 个独立方程, 再由力矩平衡条件补充一个独立方程得到求解载荷分配与分布的基本线性方程组:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n (D_{i-1,j} - D_{i,j}) F_j = 0 \\ \sum_{j=1}^n (-x_2^j n_{y2} + y_2^j n_{x2}) F_j = T_2 \end{cases} \quad (4)$$

式中 x_2^j, y_2^j 为接触点在蜗轮中的坐标; n_{x2}, n_{y2} 为蜗轮在接触点处的单位法向量。求解方程组(4)可得到接触线上载荷分布向量。

3.2 柔度阵 D 的计算

3.2.1 接触变形

由布希涅斯克公式^[14], 可得法向接触变形 a_{ij} 计算公式:

$$\begin{cases} a_{ij} = \frac{1}{\pi E' d_{ij}} \\ \frac{1}{E'} = \frac{1}{2} \left(\frac{1 - \mu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \mu_2^2}{E_2} \right) \end{cases} \quad (5)$$

其中 E_1, E_2, μ_1, μ_2 分别为蜗杆与蜗轮材料的弹性模量和泊松比, d_{ij} 为接触点 i 与接触点 j 处之间的距离。当载荷作用点 j 与变形点 i 重合时(即 $i = j$), 用二次插值多项式计算 a_{ij} 。由于接触变形具有局部性质, 略去单位载荷对其它啮合齿的影响, 即: 当 i 与 j 不在一条接触线上时, $a_{ij} = 0$ 。

3.2.2 蜗轮齿弯曲变形引起的法向变形

该蜗轮副接触线接近于蜗轮滚柱母线, 可简化为平面弯曲, 如图4, R 为蜗轮滚柱半径。可以求出接触点 j 处作用载荷 P_j 时, 蜗轮齿接触点 i 处的挠曲线方程:

$$y(x_i) = \frac{2P_j x_i^2 (x_i - 3x_j)}{3\pi E_2 R^4} \quad (6)$$

则蜗轮齿的弯曲变形 b 如下:

$$\begin{cases} b = y(x_i); & i \text{ 与 } j \text{ 在同一接触线} \\ b = 0; & i \text{ 与 } j \text{ 不在同一接触线} \end{cases} \quad (7)$$

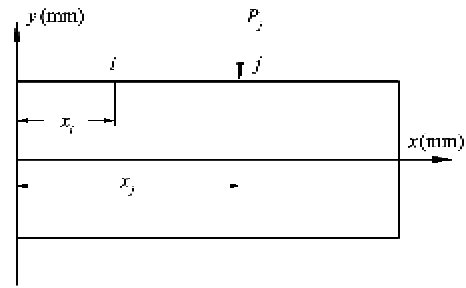


图4 蜗轮齿弯曲变形

将蜗轮齿的弯曲变形 b 投影到 i 处公法线上即得到蜗轮齿弯曲变形在 i 处引起的法向变形 b_{ij} 。

3.2.3 蜗杆轴挠曲变形引起的法向变形

该传动蜗杆轴挠曲变形如图5所示, F_j 为接触点处的载荷, R_2 为蜗杆环面半径, d_1, d_2 为蜗杆两端直径, L_1, L_2, L_3, L_4 和 L 为蜗杆各段长度。环面蜗杆可看作变截面梁, 用积分法求解挠度变形比较困难, 本文采用有限差分法求解。

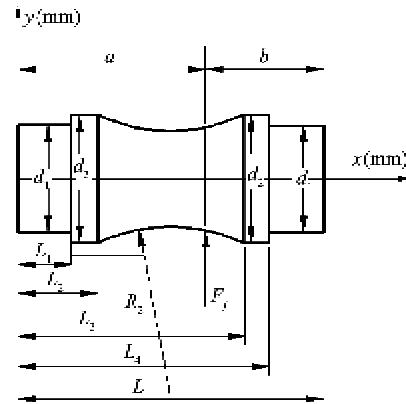


图5 蜗杆轴挠曲变形

在接触点 i 点附近把挠度方程 $y = f(x)$ 展开为泰勒级数: $x_{i+1} = x_i + h$

$$\begin{aligned} y &= y_i + \left(\frac{dy}{dx} \right)_i (x - x_i) + \frac{1}{2!} \left(\frac{d^2y}{dx^2} \right)_i (x - x_i)^2 \\ &+ \frac{1}{3!} \left(\frac{d^3y}{dx^3} \right)_i (x - x_i)^3 + \dots \end{aligned} \quad (8)$$

令 $h = x_i - x_{i-1}$, 且取得充分小, 则含 h^3 以及更高次的项均可省略, 于是由上式可得:

$$\begin{cases} \left(\frac{dy}{dx} \right)_i = \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} \\ \left(\frac{d^2y}{dx^2} \right)_i = \frac{y_{i+1} + y_{i-1} - 2y_i}{h^2} \end{cases} \quad (9)$$

将式(9)代入挠曲线的近似微分方程即得到其挠曲线有限差分方程:

$$y_{i+1} + y_{i-1} - 2y_i = h^2 \frac{M_i(x)}{EI_i(x)} \quad (10)$$

式中: $M_i(x)$ 和 $E_i I_i(x)$ 为环面蜗杆在 $x = x_i$ 处的弯矩和抗弯刚度, 计算如下:

$$\begin{cases} M(x) = -\frac{F_j b}{L} x, & 0 \leq x \leq a \\ M(x) = F_j(x-a) - \frac{F_j b}{L} x, & a \leq x \leq L \end{cases} \quad (11)$$

$$\begin{cases} E_1 I(x) = \frac{\pi E_1}{4} (A - \sqrt{R_2^2 - (X - \frac{L}{2})^2})^4, & L_2 \leq x \leq L \\ E_1 I(x) = \frac{\pi E}{64} d_1^4; & 0 \leq x \leq L_1, L_4 \leq x \leq L \\ E_1 I(x) = \frac{\pi E}{64} d_2^4; & L_1 \leq x \leq L_2, L_3 \leq x \leq L_4 \end{cases} \quad (12)$$

在蜗杆上选定 n 个点, 对每一点均按式(10)写出一个差分方程, 可得到一差分方程组:

$$\mathbf{A} \times \mathbf{Y} = \mathbf{B} \quad (13)$$

其中:

$$\mathbf{Y} = [y_{(1)}, y_{(2)}, \dots, y_{(n)}]^T \quad (14)$$

$$\mathbf{B} = [h^2 \frac{M_2}{E_1 I_2}, h^2 \frac{M_3}{E_1 I_3}, \dots, h^2 \frac{M_{n-1}}{E_1 I_{n-1}}]^T \quad (15)$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & \dots \\ \vdots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}_{(n-2) \times n} \quad (16)$$

方程组(13)加入边界条件可求得 j 处作用单位载荷时 i 处的挠曲变形 y_{ij} , 再投影到 i 处公法线上即得到蜗杆轴挠曲变形在 i 处引起的法线方向的变形 c_{ij} 。

3.3 接触线上载荷分布

由图 3(b) 齿间载荷分配计算结果可知, 在 162° 位置时该传动副受载最大。图 6 给出了同时参与啮

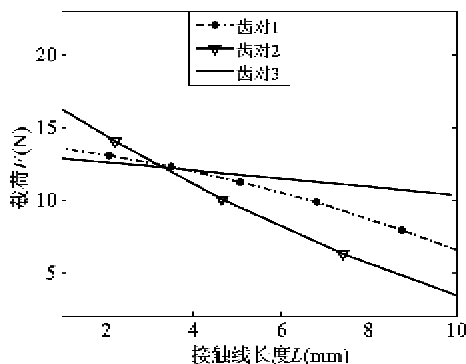


图 6 齿面接触线上载荷分布

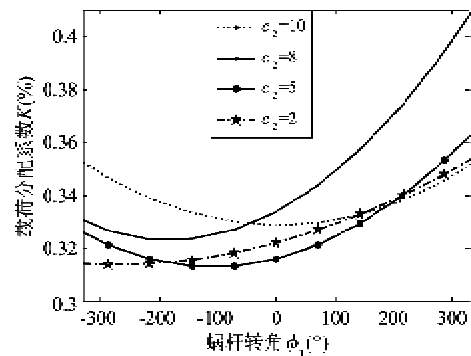
合的各齿接触线上载荷分布情况。可以看出, 倾斜式双滚子包络环面蜗杆传动接触线上的载荷分布是不均匀的, 载荷分布密度从蜗轮齿根到齿顶呈递减趋势。

4 啮合参数对齿间载荷分配及接触线上载荷分布的影响

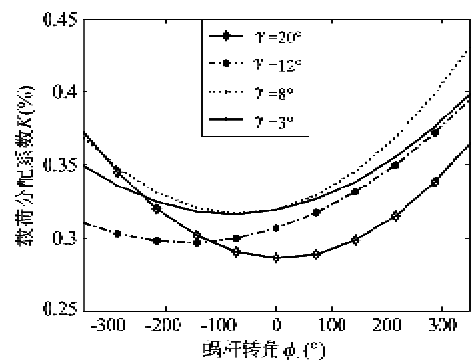
影响该传动承载能力的主要啮合参数为滚柱偏置距离 c_2 、滚柱半径 R 及倾斜角 γ , 下面针对这些啮合参数对传动副的齿间载荷分配及接触线上载荷分布的影响进行分析。

4.1 啮合参数对齿间载荷分配影响

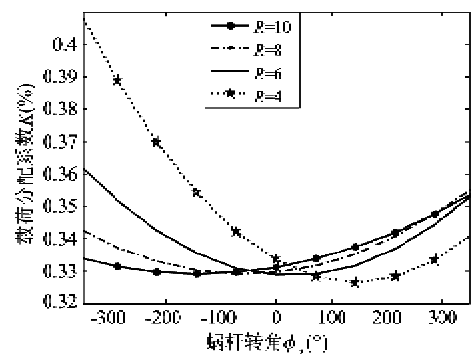
从图 7 可知, 滚柱偏置距离 c_2 取值过大、滚柱



(a) 偏距对齿间载荷的影响



(b) 倾斜角对齿间载荷的影响



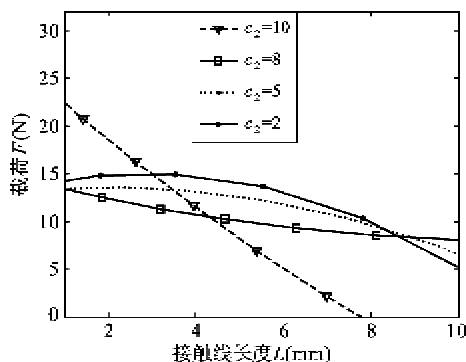
(c) 滚柱半径对齿间载荷的影响

图 7 啮合参数对齿间载荷分配的影响

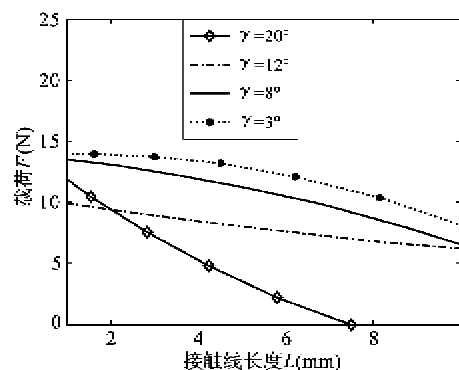
半径 R 取值过小以及倾斜角 γ 取值过小时,齿对在啮合过程中载荷分配均变化较大,会极大削弱蜗轮齿的强度,这对传动强度是不利的。在传动过程中,当 $c_2 \leq 10 \text{ cm}$ 、 $\gamma \geq 8^\circ$ 及 $R \geq 5 \text{ cm}$ 时,齿间载荷分配相对较稳定。

4.2 啮合参数对接触线上载荷分布影响

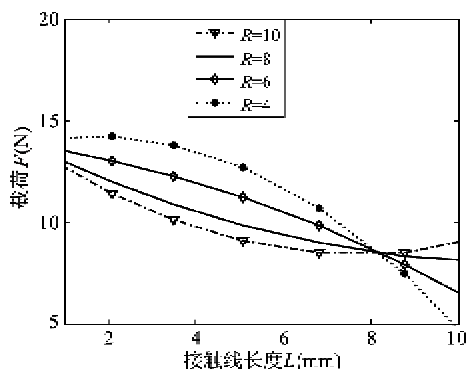
从图 8 可知,增大或减小滚柱偏置距离 c_2 、增大或减小倾斜角 γ 及增大或减小滚柱半径 R ,蜗轮轮齿在啮合过程中接触线上载荷分布变化均较大。当 c_2 在 $5 \sim 8 \text{ cm}$ 、 γ 在 $8 \sim 12^\circ$ 和 R 在 $6 \sim 8 \text{ cm}$ 时,轮齿接触线上载荷分布相对平稳。



(a) 偏距对接触线上载荷分布的影响



(b) 倾斜角对接触线上载荷分布的影响



(c) 滚柱半径对接触线上载荷分布的影响

图 8 啮合参数对接触线上载荷分布的影响

5 结论

本文在啮合分析的基础上,提出一种求解倾斜式双滚子包络环面蜗杆传动齿间载荷分配与接触线上载荷分布的方法。并对该新型传动各啮合参数对齿间载荷分配及接触线上载荷分布的影响做了深入、系统的探讨和研究。

数值实例研究表明:在传动过程中,蜗轮齿对从啮入端到啮出端其齿间载荷分配呈抛物线变化规律,这与该蜗轮副中蜗杆轴向刚度的变化规律是一致的。接触线上载荷分布也不均匀,从蜗轮齿根到齿顶呈递减趋势。倾斜式双滚子包络环面蜗杆传动具有良好的传动性能。滚柱半径 R 、滚柱偏距 c_2 、倾斜角 γ 等啮合参数对齿间载荷分配及接触线上载荷分布有较大影响。要保持传动过程中载荷分配较均匀,滚柱偏置距离 c_2 不宜过大、滚柱半径 R 和倾斜角 γ 不宜过小;要使接触线上载荷分布均衡,滚柱偏置距离 c_2 、滚柱半径 R 和倾斜角 γ 均不宜过大或过小。通过合理搭配倾斜式双滚子包络环面蜗杆传动的啮合参数对提高传动副的传动性能和承载能力具有重要价值。

参考文献

- [1] 王进戈,张均富,邓星桥等. 无侧隙双滚子包络环面蜗杆传动的参数优化. 机械工程学报, 2010, 46(21): 6-9
- [2] 王进戈. 滚锥包络环面蜗杆传动. 成都: 四川科学技术出版社, 2000: 84-105
- [3] Li J F, Wang J X, Zhang G, et al. Finite element analysis of straight and helical bevel gears. In: Proceedings of the Conference of International Mechanical Transmission, Tianjin, China, 1997. 768-775
- [4] 秦东兴,秦大同,杨洪成. 包络环面蜗杆传动的承载接触研究. 重庆大学学报(自然科学版), 2001, 24(2): 1-4
- [5] 徐晓俊. 曲率可控点接触蜗杆传动的研究: [博士学位论文]. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学机械系, 1990. 20-58
- [6] Elkholy A H. Tooth load sharing in high contact ratio spur gears. ASME Journal of Mechanisms, Transmissions, and Automation in Design, 1985, 107(2): 11-20
- [7] Simon V. Stress analysis in double enveloping worm gears by finite element method. ASME Journal of Mechanical Design, 1993, 115(3): 139-143
- [8] 王建军. 平面二次包络弧面蜗杆传动弹性接触有限元分析: [硕士学位论文]. 重庆: 重庆大学机械工程学院, 1983. 15-48

- [9] 唐劲松. 平面二次包络环面蜗杆传动齿面承载能力及润滑研究:[博士学位论文]. 徐州:中国矿业大学机电工程学院, 1991. 19-57
- [10] Ling T J, Li R F. A finite element method for 3D static and dynamic contact analysis of gear drives. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2007, 196 (9/12): 1716-1728
- [11] Jia S X, Howard I. Comparison of localised spalling and crack damage from dynamic modelling of spur gear vibrations. *Mechanical system and signal processing*, 2006, 20: 332-349
- [12] 王进戈, 柳在鑫, 张均富等. 自动消除齿侧间隙机构. 中国专利, CN101598212. 2009-12-09
- [13] 余红华, 张光辉. 平面二次包络环面蜗杆传动齿间载荷分配的简化计算. *机械科学与技术*, 2002, 21 (6): 911-914.
- [14] 黄炎. 工程弹性力学. 北京:清华大学出版社, 1982. 25-98

Research on the load carrying capacity of inclined double-roller enveloping hourglass worm gears

Liu Zaixin^{* **}, Wang Jing^{*}, Zhang Junfu^{*}, Xiang Zhongfan^{*}

(^{*} School of Mechanical Engineering & Automation, Xihua University, Chengdu 610039)

(^{**} School of Manufacturing Science and Engineering, Sichuan University, Chengdu 610065)

Abstract

To evaluate the load carrying capacity of inclined double-roller enveloping hourglass worm gears, analytical models for solving the load sharing among teeth and the load distribution along the contact line were presented. According to the characteristic of the inclined double-roller enveloping hourglass worm gears, a load calculation model was established based on some reasonable assumptions. Based on the work mentioned above, the calculation formula for load sharing among the meshing pairs was given. The calculation model for load distribution of the contact line was established based on the Boussinesq's formula and the finite-difference method. The influencing factors such as installed offset of roller, roller radius and inclined angle of load carrying capacity were analyzed based on the numerical simulation. The results show that the curve of the load sharing among the meshing pairs is a parabola from the starting point to the end point, and the load distribution along the contact line shows the tendency to decrease from root to top of the tooth. Finally, the installed offset of roller, the roller radius and the inclined angle should be controlled into the intervals of 5 to 8 cm, 7 to 9 cm and 8° to 12° , respectively, in order to effectively maintain the load carrying capacity of the inclined double-roller enveloping hourglass worm gears.

Key words: hourglass worm gears, load sharing, load carrying capacity, finite-difference method