

力反馈模式半球谐振陀螺仪的正交控制^①赵洪波^② 任顺清

(哈尔滨工业大学空间控制与惯性技术研究中心 哈尔滨 150001)

摘 要 介绍了半球谐振陀螺仪在力反馈工作模式下的普通控制与正交控制的概念,推导了半球谐振子唇沿振动和波腹方位角表达式,建立了谐振子存在密度不均匀缺陷时谐振子的动力学方程,由此得到了谐振子振动位移的状态方程,进而通过解微分方程求出了状态方程的精确解析解。然后给出了普通控制方法和正交控制方法的主激励电压与辅助激励电压比值的表达式,由此可精确估计陀螺的输入角速率。对这两种控制方法的解算角速率误差进行了比较与仿真分析,分析表明正交控制方法可有效抑制半球谐振子工艺缺陷带来的误差。最后给出了两种工作模式下为保证半球谐振陀螺角速率估计精度所要求的密度四次谐波的允差。

关键词 半球谐振陀螺(HRG), 力反馈工作模式, 密度分布不均匀, 正交控制

0 引言

半球谐振陀螺(hemispherical resonator gyro, HRG)是一种哥氏振动陀螺仪(Coriolis vibratory gyro),主要由半球谐振子、激励电极和信号检测单元三部分组成。根据激励方式的不同它可分为力反馈模式和全角模式。国内外对 HRG 的半球谐振子的振动分析仅停留在用近似方法或对其简单的环形模型进行简略分析。文献[1,2]在给出了谐振子振动的动力学方程后,分析了其简化的模型,但并没有给出其振动的解。文献[3,4]利用近似方法均值法求取半球谐振子的振动位移表达式和角速率估计误差方程,这种近似分析仅在某些特定的假设条件下可以使用,并不具有通用性。文献[5]给出了正交控制的定义及力反馈模式振动位移的数值解算方法,但并没有给出解析表达式。本研究利用解微分方程的解析法,给出了存在质量分布不均匀缺陷时半球谐振子的径向振动位移和波腹方位角的精确表达式,详细推导了力反馈模式下半球谐振陀螺仪的工作机理,并比较了普通控制与正交控制的误差抑制能力,分别给出了这两种控制方法为保证半球谐振陀螺角速率估计精度时的谐振子密度不均匀的四次谐波的允差。

1 半球谐振子波腹角的推导

力反馈模式半球谐振陀螺的工作原理图如图 1 所示。图 1 中 A、B 分别为主激励电极(0°位置)和力反馈控制电极(45°位置); M_1 、 M_2 为信号检测单元,用来提取谐振子唇沿相应位置的振动位移量; K_1 、 K_2 为控制环节, K_1 使 0°位置的振幅保持恒定, K_2 通过 M_2 检测的位移量控制谐振子上波腹的方位角始终保持在 0°位置。

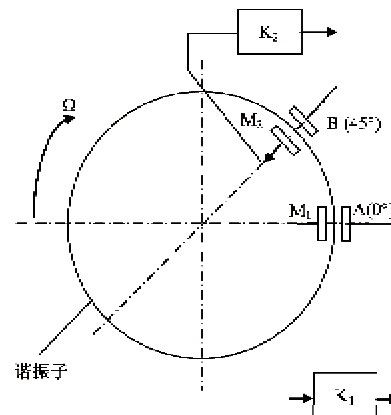


图1 力反馈模式半球谐振陀螺仪工作原理图

在力反馈模式下,半球谐振陀螺仪的控制模式分为普通控制模式和正交控制模式。普通控制是指

① 国防预研(51309050601)资助项目。

② 男,1984年生,博士生;研究方向:惯性技术;联系人,E-mail: h84b@163.com
(收稿日期:2012-04-10)

通过调节电极 B 的电压,使波腹方位角严格保持在 0° 位置;正交控制是指通过调节电极 B 的电压,控制谐振子振动分量中与主激励电极时间相位正交的量为 0,使得波腹方位角在 0° 附近。

图 2 所示为半球谐振子坐标系 $O-XYZ$,半球壳谐振子中曲面一点的矢径为 R ,把经线和纬线作为

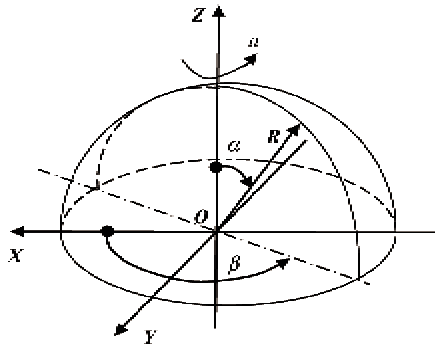


图 2 半球谐振子坐标系

坐标曲线 α, β 。谐振子唇沿处径向振动可写为^[6]

$$\begin{aligned} w &= p \cos 2\beta + q \sin 2\beta \\ &= (a \cos \omega_0 t + m \sin \omega_0 t) \cos 2\beta \\ &\quad + (b \cos \omega_0 t + n \sin \omega_0 t) \sin 2\beta \\ &= ((a \cos 2\beta + b \sin 2\beta)^2 + (m \cos 2\beta \\ &\quad + n \sin 2\beta)^2)^{\frac{1}{2}} \cos(\omega_0 t + \phi) \\ &= A_w \cos(\omega_0 t + \phi) \end{aligned} \quad (1)$$

其中 $p(t), q(t)$ 为谐振子按二阶固有频率振动的位移函数。 A_w 为谐振子唇沿环向角 β 角处的径向振动的振幅为

$$\begin{aligned} A_w &= ((a \cos 2\beta + b \sin 2\beta)^2 + (m \cos 2\beta \\ &\quad + n \sin 2\beta)^2)^{\frac{1}{2}} \\ &= (0.5(a^2 + b^2 + m^2 + n^2) + 0.5(a^2 + m^2 \\ &\quad - b^2 - n^2) \cos 4\beta + (ab + mn) \sin 4\beta)^{\frac{1}{2}} \\ &= (0.5(a^2 + b^2 + m^2 + n^2) + A' \cos 4(\beta - \vartheta))^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (2)$$

则波腹方位角 ϑ 为

$$\begin{aligned} \tan 4\vartheta &= 2(ab + mn)/(a^2 + m^2 - b^2 - n^2) \quad (3) \\ \text{当振动为驻波即 } a/b &= m/n \text{ 时,根据式(1),得} \\ \tan 2\vartheta &= \sqrt{(b^2 + n^2)/(a^2 + m^2)} \\ &= |n/m| \\ &= |b/a| \end{aligned} \quad (4)$$

式(4)为文献[4]中常用的求解驻波角度的公式。

由前述可知,普通控制即 $\vartheta = 0$ 的控制,即 $ab + mn = 0$;正交控制是使得 $n = 0$,此时 b 也几乎为 0,

所以由式(3)可知波腹方位角在 0° 附近。

2 力反馈模式下半球谐振子质量分布不均匀的状态方程的建立

由文献[6],建立 $\alpha = \pi/2$ 时谐振子力反馈模式下半球谐振子质量分布不均匀的动力学方程为

$$\begin{cases} F_1 \cos \omega_0 t = \ddot{p}(m_3 + m_1 a_4) + \ddot{q} b_4 m_1 - \dot{q} 2\Omega b_0 + \dot{p} l \\ \quad + p(e\rho_0 - da_4/2 - c_0) + q(-\dot{f} b_0 - db_4/2) \\ \quad + b_2 f + a_2 g \\ F_2 \cos \omega_0 t = \ddot{q}(m_3 - m_1 a_4) + \ddot{p} b_4 m_1 + \dot{p} 2\Omega b_0 + \dot{q} l \\ \quad + q(e\rho_0 + da_4/2 - c_0) + p(\dot{f} b_0 - db_4/2) \\ \quad - a_2 f + b_2 g \end{cases} \quad (5)$$

其中:

$$\begin{aligned} m_0 &= -\rho_0 h R^2 \int_0^{\pi/2} (U^2 + V^2 + W^2) \sin \alpha d\alpha \\ &= -1.52961 \rho_0 h R^2; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m_1 &= -h R^2 / 2 \int_0^{\pi/2} (U^2 - V^2 + W^2) \sin \alpha d\alpha \\ &= -0.55296 h R^2; \end{aligned}$$

$$b_0 = 2h R^2 \rho_0 \int_0^{\pi/2} W V \sin \alpha d\alpha = -0.95870 \rho_0 h R^2;$$

$$\begin{aligned} d &= h R^2 \Omega^2 \int_0^{\pi/2} (V^2 - W^2) \sin \alpha d\alpha \\ &= -0.89408 h R^2 \Omega^2; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e &= h R^2 \Omega^2 \int_0^{\pi/2} (V^2 + W^2) \sin \alpha d\alpha \\ &= 1.31777 h R^2 \Omega^2; \end{aligned}$$

$$f = -h R^3 \dot{\Omega} \int_0^{\pi/2} V \sin \alpha d\alpha = -0.35619 h R^3 \dot{\Omega};$$

$$g = h R^3 \Omega^2 \int_0^{\pi/2} W \sin \alpha d\alpha = -0.88629 h R^3 \Omega^2;$$

$$l = \omega_0 m_0 / Q;$$

$$\begin{aligned} F_1 &= \frac{R^2 \varepsilon_0 V_1^2 \sin \varphi_a \cos 2\varphi_b}{\pi d_0^2} \int_0^{\pi/2} W \sin \alpha d\alpha \\ &= -\frac{0.44315 R^2 \varepsilon_0 V_1^2 \sin \varphi_a \cos 2\varphi_b}{\pi d_0^2}; \end{aligned}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{c_0 + e\rho_0}{m_0} + \frac{\Omega^2 b_0^2}{m_0^2}};$$

$$F_2 = \frac{R^2 \varepsilon_0 V_2^2 \sin \varphi_a \sin 2\varphi_b}{\pi d_0^2} \int_0^{\pi/2} W \sin \alpha d\alpha$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{0.44315R^2\varepsilon_0V_2^2\sin\varphi_a}{\pi d_0^2}\sin 2(\varphi_b + 45^\circ); \\
c_0 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \{ H[(-U^2 + W'U - 4WV - U'W \\
&\quad - 2W^2)\gamma + U''U + W'U - 4V^2 - WV4 \\
&\quad - U'W - 2W^2] + H_1(-3U^2 + V''V) \\
&\quad + D/R^2[(-U^2 + 5W'U + 2W''V - U'W5 \\
&\quad + 2V''W + 4W^2 + 9W''W)\gamma + U'''W - 12W^2 \\
&\quad + U''U - W'''U - 4V^2 - 14WV - U'W + W''W \\
&\quad - W^{(4)}W] + D_1/R^2(-3U^2 + 8W'U \\
&\quad + V''V + 4W''V + 8WV - 8U'W + 4V''W \\
&\quad + 16W^2 + 16W''W) \} \sin\alpha d\alpha; \\
&= (-0.18852\gamma - 0.03589)H + 0.15262H_1 \\
&\quad + (20.30976\gamma - 15.88417)D/R^2 \\
&\quad + 41.10248D_1/R^2 \\
&= Eh(6 \times 10^{-5}\gamma + 2.012 \times 10^{-2}h^2\gamma \\
&\quad - 0.38892h^2 - 4.042 \times 10^{-2}R^2)/[R^2(\gamma^2 - 1)]
\end{aligned}$$

式中 a_2, a_4 和 b_2, b_4 分别为密度沿谐振子周向角 β 展开式第 2、4 次谐波余弦项幅值和正弦项幅值, ρ_0

为密度的均值 ($\rho(\beta) = \rho_0 + \sum_{i=1}^{\infty} (a_i \cos i\beta +$

$b_i \sin i\beta)$), Ω 和 $\dot{\Omega}$ 分别为谐振子的输入角速率和输入角加速度, h 为半球谐振子薄壳的厚度, R 为半球谐振子薄壳中曲面的半径, $U(\alpha) = V(\alpha) = \sin\alpha \tan^2(\alpha/2)$, $W(\alpha) = -(2 + \cos\alpha)(\tan^2(\alpha/2))$ 为二阶固有振型的瑞利函数。式(5)中的一些参数通过对瑞利函数求积分可以得到精确的数值, ε_0 为介电常数, V_1 为 φ_b 处主激励电极 A 电压的幅值, φ_b 为主激励电极 A 的方位(本文取 $\varphi_b = 0$), V_2 为 $\varphi_b + 45^\circ$ 处力反馈电极 B 电压的幅值, 且取激励电压的频率与谐振子的固有频率 ω_0 一致, d_0 为电极与谐振子之间的间隙, φ_a 为电极所覆盖的角度大小, Q 为半球谐振子的品质因数, E 为杨氏模量, γ 为泊松比, ω_0 为不考虑频率裂解时的半球谐振子二阶固有频率, $W', W'', W''', W^{(4)}$ 分别表示瑞利函数 W 对环向角 α 求 1-4 阶导数。其它类推, $\dot{p}, \dot{q}$ 分别表示 p, q 对时间的导数, $\ddot{p}, \ddot{q}$ 则为二阶导数, $H = Eh/(1 - \gamma^2)$, $H_1 = Eh/[2(1 + \gamma)]$, $D = Eh^3/[12(1 - \gamma^2)]$, $D_1 = Eh^3/[24(1 + \gamma)]$ 。

设 $x = \dot{p}, y = \dot{q}$, 根据式(4), 用 p, q, x, y 表示 $\dot{x}(= \ddot{p}), \dot{y}(= \ddot{q})$, 并写成矩阵形式, 可以建立如下的振动位移和速度的状态方程:

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \dot{p} \\ \dot{q} \\ \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} &= A \begin{bmatrix} p \\ q \\ x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ f_{31} \\ f_{41} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} & A_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ q \\ x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ f_{31} \\ f_{41} \end{bmatrix} \quad (6)
\end{aligned}$$

其中:

$$\begin{aligned}
A_{31} &= -(\varepsilon\rho_0m_0 - a_4dm_0/2 + c_0m_0 - m_1a_4\varepsilon\rho_0 \\
&\quad + a_2^2m_1d/2 - m_1a_4c_0 - \dot{\Omega}, b_0b_4m_1 \\
&\quad + b_4^2dm_1/2)/k; \\
A_{32} &= -(-\dot{\Omega}, b_0m_0 - b_4dm_0/2 + m_1a_4\dot{\Omega}, b_0 \\
&\quad - \varepsilon\rho_0b_4m_1 - c_0b_4m_1)/k; \\
A_{33} &= [2\Omega b_0b_4m_1 - l(m_0 - m_1a_4)]/k; \\
A_{34} &= [2\Omega b_0(m_0 - m_1a_4) + lb_4m_1]/k; \\
A_{41} &= -(\dot{\Omega}, b_0m_0 + \dot{\Omega}, b_0m_1a_4 - b_4dm_0/2 \\
&\quad - \varepsilon\rho_0b_4m_1 - c_0b_4m_1)/k; \\
A_{42} &= -(\varepsilon\rho_0m_0 + a_4m_0d/2 + c_0m_0 + \varepsilon\rho_0m_1a_4 \\
&\quad + a_4^2dm_1/2 + c_0m_1a_4 + \dot{\Omega}, b_0b_4m_1 \\
&\quad + b_4^2dm_1/2)/k; \\
A_{43} &= -[2\Omega b_0(m_0 + m_1a_4) - lb_4m_1]/k; \\
A_{44} &= -[2\Omega b_0b_4m_1 + l(m_0 + m_1a_4)]/k; \\
f_{31} &= [-b_2fm_0 + a_2gm_0 - m_1a_4b_2f - m_1a_4a_2g \\
&\quad + a_2fb_4m_1 - b_2gb_4m_1 - F_1(m_0z \\
&\quad - m_1a_4)\cos\omega_0t + F_2m_1b_4\cos\omega_0t]/k; \\
f_{41} &= [-a_2fm_0 - a_2fm_1a_4 + b_2gm_0 + b_2gm_1a_4 \\
&\quad + b_2fb_4m_1 + a_2gb_4m_1 - F_2(m_0 \\
&\quad + m_1a_4)\cos\omega_0t + F_1m_1b_4\cos\omega_0t]/k; \\
k &= m_0^2 - m_1^2(a_4^2 + b_4^2).
\end{aligned}$$

由于实际应用中角加速度较小, 且由文献[4]可知密度不均匀的二次谐波对四波腹振动的影响可以忽略, 所以在以下求解过程中均假设 $\dot{\Omega} = 0, a_2 = b_2 = 0$ 。

3 状态方程的求解与普通控制分析

下面将求取式(6)的精确解析解。由文献[7]可得式(6)的解为

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} p & q & x & y \end{bmatrix}^T &= D_1\cos\omega_0t + D_2\sin\omega_0t \\
&= \begin{bmatrix} a & b & D_{13} & D_{14} \end{bmatrix}^T \cos\omega_0t
\end{aligned}$$

$$+ [m \quad n \quad D_{23} \quad D_{24}]^T \sin \omega_0 t \quad (7)$$

其中 D_1, D_2 由下式求得:

$$D_1 = 2\text{Real}[(i\omega_0 I_{4 \times 4} - A)^{-1} F' / 2],$$

$$D_2 = -2\text{Image}[(i\omega_0 I_{4 \times 4} - A)^{-1} F' / 2]$$

其中 Real 与 Image 分别为取矩阵各元素的实部和虚部。

由于 $F' = [0 \quad 0 \quad F'_1 \quad F'_2]^T$, 其中 $F'_1 = [F_1(m_0 - m_1 a_4) - F_2 m_1 b_4] / k$; $F'_2 = [F_2(m_0 + m_1 a_4) - F_1 m_1 b_4] / k$

由前所述, 普通控制时, $ab + mn = 0$, 利用式(7)求解 a, b, m, n 并代入得:

$$F_2^2 [B_1 m_1^2 b_4^2 - B_2 (m_0 + m_1 a_4) m_1 b_4 + B_3 (m_0 + m_1 a_4)^2] + F_1^2 [B_1 (m_0 - m_1 a_4)^2 - B_2 (m_0 - m_1 a_4) m_1 b_4 + B_3 m_1^2 b_4^2] + F_1 F_2 [-2B_1 (m_0 - m_1 a_4) m_1 b_4 + B_2 (m_0^2 - m_1^2 a_4^2 + m_1^2 b_4^2) - 2B_3 (m_0 + m_1 a_4) m_1 b_4 m_1 b_4] = k_{F2} F_2^2 + k_{F1} F_1^2 + k_{F1F2} F_1 F_2 = 0 \quad (8)$$

其中:

$$B_1 = -[\omega_0^2 (A_{41} + A_{43} A_{44}) + A_{41} A_{42}];$$

$$B_2 = (\omega_0^2 + A_{42})(\omega_0^2 + A_{31}) + \omega_0^2 (A_{33} A_{44} + A_{34} A_{43}) + A_{32} A_{41};$$

$$B_3 = -[\omega_0^2 (A_{32} + A_{33} A_{34}) + A_{31} A_{32}].$$

对式(8)求解得:

$$F_2 / F_1 = (V_2 / V_1)^2 = (-k_{F1F2} + \sqrt{k_{F1F2}^2 - 4k_{F2}k_{F1}}) / (2k_{F2}) \quad (9)$$

当 $a_4 = b_4 = 0$ 时, 对式(9)进行计算并忽略小项得:

$$\begin{aligned} \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^2 &= -1.91741 \frac{\rho_0 h R^2}{l} \Omega \\ &= -1.91741 \frac{\rho_0 h R^2 \omega_0^2 \zeta}{l} \frac{\Omega}{\omega_0^2 \zeta} \\ &= -1.91741 \frac{\rho_0 h R^2 \omega_0}{l Q} \frac{\Omega}{\omega_0^2 \zeta} \\ &= 4K \frac{\Omega}{\omega_0^2 \zeta} \end{aligned} \quad (10)$$

则有 $\Omega = \frac{\omega_0^2 \zeta}{4K} \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^2$, 其中 ζ 为阻尼比, $K = \frac{b_0}{2m_0} = 0.313381$ 。所以根据主激励电极和力反馈控制电极电压的比值, 就可以解算出角速率。由式(9)和式(10)可得普通控制下由 a_4, b_4 产生的误差为

$$\Omega_{\text{误差}} = \frac{\omega_0^2 \zeta}{4K} \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^2 - \Omega \quad (11)$$

4 正交控制分析

由前所述, 正交控制时满足 $n = 0$, 利用式(7)求解 n 的表达式, 并令其为 0, 得:

$$\begin{aligned} \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^2 &= \{-1.91741 \rho_0 h R^2 \Omega [7.02603 k_3 h^2 \rho_0^3 R^4 \Omega^2 \\ &\quad + 1.91109 k_1 \rho_0 l^2 - 0.38202 k_2^2 h R^2 (a_4^2 + b_4^2) \\ &\quad + 0.66234 k_2 l h \rho_0 R^2 b_4 \Omega] \} / \{ [7.02603 \\ &\quad (0.56667 h \rho_0 R^2 \Omega^2 + c_0) h^2 \rho_0^3 R^4 \Omega^2 \\ &\quad + 1.91109 k_1 \rho_0 l^2 - 0.38202 k_2^2 h R^2 (a_4^2 + b_4^2) \\ &\quad - 1.26997 k_2 h^2 \rho_0^2 R^4 a_4 \Omega^2] \} \end{aligned} \quad (12)$$

其中, $k_1 = 0.71689 h \rho_0 R^2 \Omega^2 + c_0$, $k_2 = 0.51972 h \rho_0 R^2 \Omega^2 - c_0$, $k_3 = 0.86711 h \rho_0 R^2 \Omega^2 + c_0$ 。由式(12)求取角速率估计表达式并化简忽略小量得:

$$\begin{aligned} \Omega &= \frac{\omega_0^2 \zeta}{4K} \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^2 - (0.66234 l^2 b_4 \Omega \\ &\quad + 1.26997 h \rho_0 R^2 l a_4 \Omega^2) / [13.47177 h^2 \rho_0^3 R^4 \Omega^2 \\ &\quad + 3.66433 \rho_0 l^2 - 0.73249 c_0 h R^2 (a_4^2 + b_4^2) \\ &\quad - 1.26997 h \rho_0 R^2 l b_4 \Omega] \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^2 \\ &= \frac{\omega_0^2 \zeta}{4K} \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^2 - \Omega_{\text{误差}} \end{aligned} \quad (13)$$

式(13)即为正交控制下含谐振子密度误差的角速率估计的表达式, 当输入角速率为零时, 陀螺仪输出为零, 这说明部分正交控制模式能够克服由谐振子密度缺陷引起的零偏, 从而提高了陀螺仪的性能。

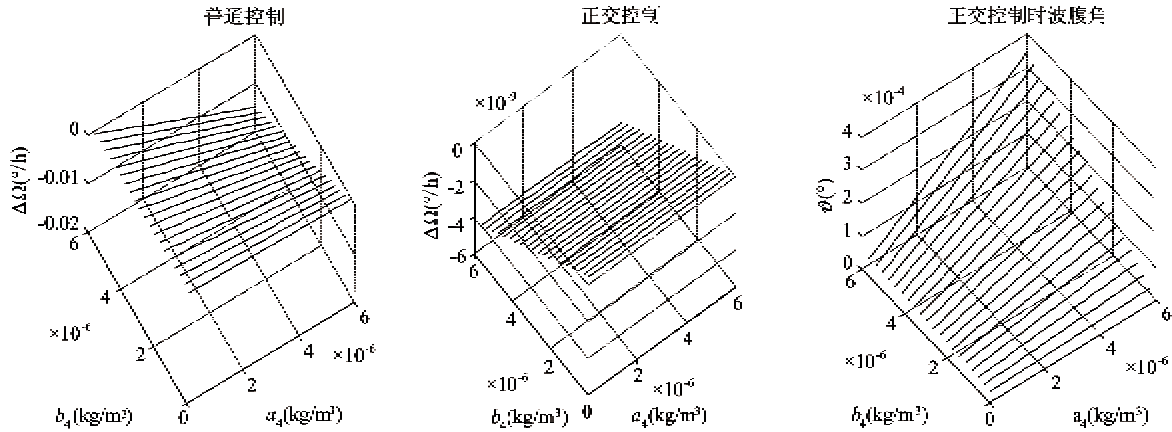
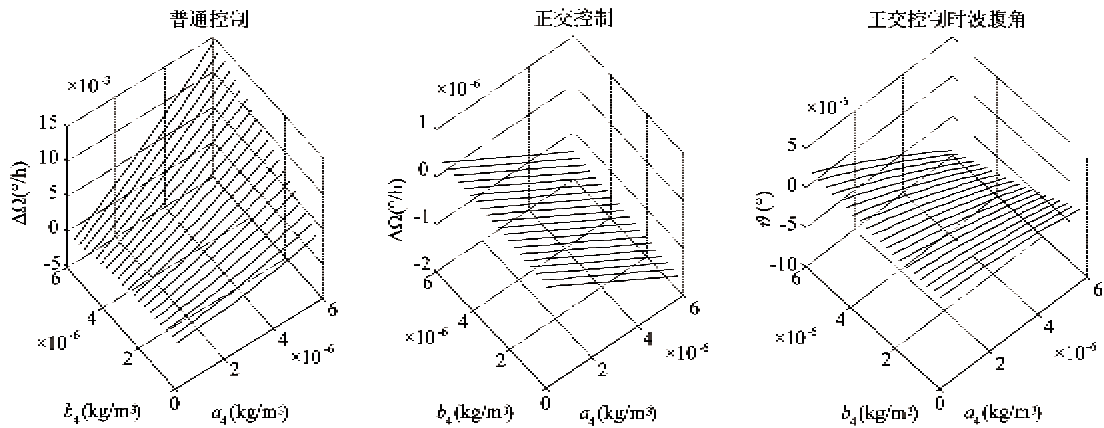
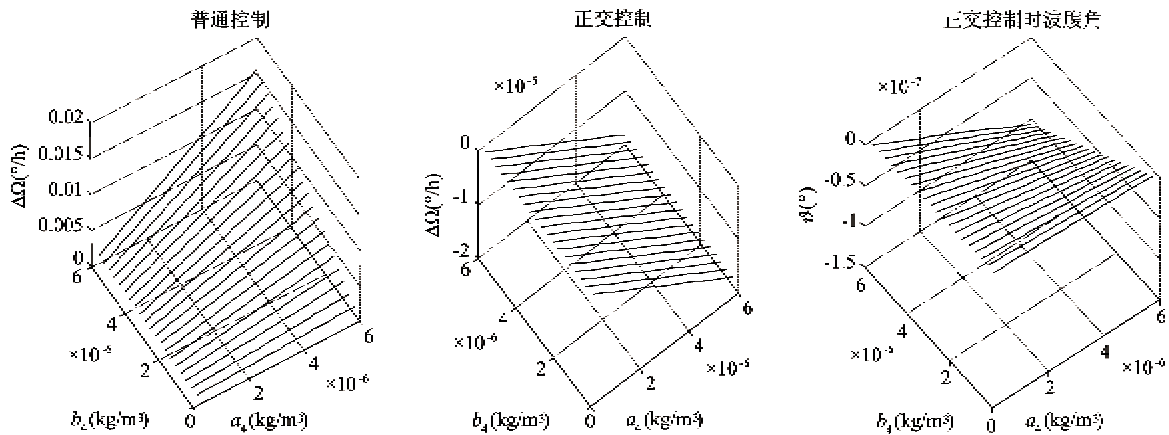
5 误差分析与仿真

下面对密度四次谐波对普通控制与正交控制角速率估计的影响进行仿真。由式(12)、(13)可得:

$$\Omega_{\text{误差}} = \frac{\omega_0^2 \zeta}{4K} \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^2 - \Omega \quad (14)$$

且对于给定的谐振子参数和误差成分以及角速率, 角速率估计误差是一个与时间无关的确定值。根据文献[6]中提供的谐振子的具体参数分别对不同的 Ω, a_4, b_4 进行计算, 得出角速率误差及正交控制时波腹方位角随 Ω, a_4, b_4 的变化趋势如图 3 - 图 5 所示。

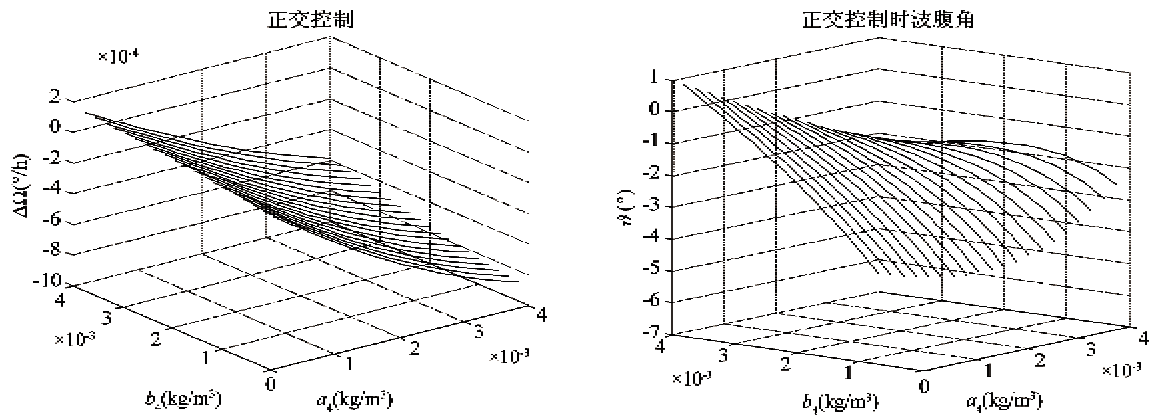
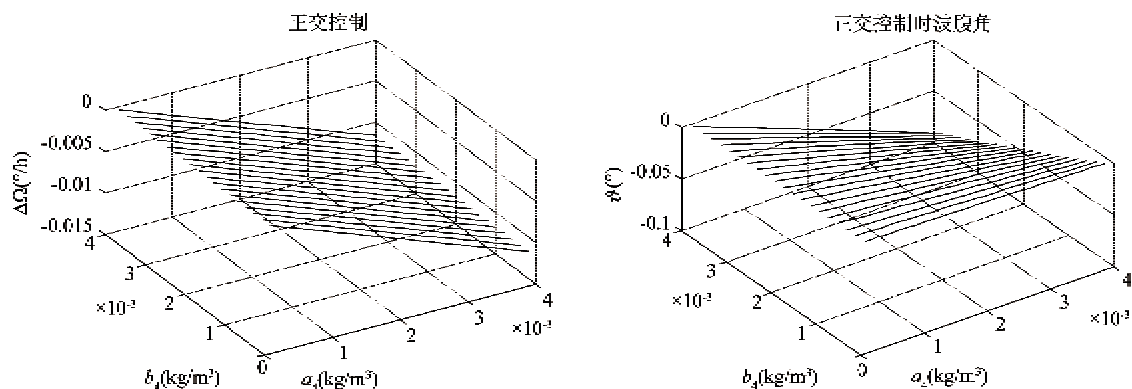
由图 3 - 图 5 可知, 正交控制能够极大地抑制误差, 且抑制谐振子缺陷的误差能力是普通控制的 10^3 倍以上, 并且普通控制时当四次谐波成分 $(a_4^2 + b_4^2)^{1/2}$ 达到 $7 \times 10^{-6} \text{ kg/m}^3$ 时, 角速率估计误差将达

图3 $\Omega = 0^\circ/\text{s}$ 时角速率估计误差及波腹方位角随 a_4, b_4 的变化趋势图4 $\Omega = 1^\circ/\text{s}$ 时角速率估计误差及波腹方位角随 a_4, b_4 的变化趋势图5 $\Omega = 10^\circ/\text{s}$ 时角速率估计误差及波腹方位角随 a_4, b_4 的变化趋势

到 $0.01^\circ/\text{h}$ 。在此误差范围正交控制时,波腹方位角在误差成分较小时在 0° 附近。下面分析谐振子密度分布不均匀对正交控制角速率估计精度及波腹方位角的影响,结果如图6、图7所示。

由图6、图7可知,当采取正交控制时,在角速率较大并且当四次谐波成分 $(a_4^2 + b_4^2)^{1/2}$ 达到

$3 \times 10^{-3} \text{kg}/\text{m}^3$ 时,角速率估计误差将达到 $0.01^\circ/\text{h}$ 。在角速率较小时,波腹方位角将达到 7° ,但由于采取正交控制波腹方位角对角速率估计没有影响,所以我们并不关心波腹方位角的大小。并且由图可知波腹方位角随角速率增大迅速回到 0° 附近。

图 6 $\Omega = 1^\circ/\text{s}$ 时角速率估计精度及波腹方位角随 Ω, a_4, b_4 的变化趋势图 7 $\Omega = 10^\circ/\text{s}$ 时角速率估计精度及波腹方位角随 Ω, a_4, b_4 的变化趋势

6 结论

本文在给出闭环力反馈模式下半球谐振陀螺仪的动力学方程的基础上,经过一定的数据处理,建立振动位移的状态方程,利用解微分方程特解的方法,给出了陀螺仪唇沿振动位移的精确解析解,克服了以往使用均值法来估计输入角速率,而没有给出精确振动位移的缺点。本文的主要贡献是推导了半球谐振子径向振动和波腹角表达式,建立了力反馈模式下半球谐振子环向密度不均匀谐振子的振动位移和速度的状态方程;推导出陀螺普通控制与正交控制时的角速率估计及其误差表达式。从理论上,通过推导和仿真得出的正交控制能够极大地抑制谐振子缺陷误差,且正交控制模式抑制谐振子缺陷的误差能力是普通控制的 10^3 倍以上。在普通控制与正交控制模式下,密度四次谐波分别为 $7 \times 10^{-6} \text{ kg/m}^3$ 和 $3 \times 10^{-3} \text{ kg/m}^3$ 时,角速率估计误差将为 $0.01^\circ/\text{h}$,所以半球谐振陀螺仪采用正交控制模式将使陀螺仪的精度得到很大提高。

参考文献

- [1] 高胜利,吴简彤. 基于轨迹图法的半球谐振陀螺动力学模型描述. 中国惯性技术学报, 2007, 15(5): 589-592
- [2] Loveday P W. Analysis and compensation of imperfection effects in piezoelectric vibratory gyroscope: [Ph. D dissertation]. Virginia Polytechnic Institute and State University, 1999. 15-43
- [3] Friedland B, Hutton M. Theory and error analysis of vibrating-member gyroscope. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1978, 23(4): 545-556
- [4] (俄罗斯) 马特维耶夫等著, 杨业非, 赵辉译. 固态波动陀螺. 北京: 国防工业出版社, 2009. 1-43
- [5] IEEE Std 1431, Standard Specification Format Guide and Test Procedure for Coriolis Vibratory Gyros. IEEE Aerospace and Electronic Systems Society, 2004. 56-66
- [6] 任顺清, 赵洪波. 半球谐振子密度分布不均匀对输出精度的影响. 中国惯性技术学报, 2011, 19(3): 364-368
- [7] 陈友朋, 钱明钟, 陈滨. 两类微分方程组的特解表达式. 高等数学研究, 2011, 14(3): 3-5

- [8] Zhanov Y K, Zhuravlev V P. Effect of movability of the resonator center on the operation of a hemispherical resonator gyro. *Mechanics of Solids*, 2007, 44(3): 851-859
- [9] Michael Y, Stephan V, Charlotta E. The influence of mass imperfections on the evolution of standing waves in slowly rotating spherical bodies. *Journal of Sound and Vibration*, 2011, 330: 127-135
- [10] Asokanthan S F, Cho J Y. Dynamic stability of ring-based angular rate sensors. *Journal of Sound and Vibration*, 2006, 295:571-583
- [11] Emily L B, Allan Y L. In-flight characterization of cassini inertial reference units. In: *Proceedings of the AIAA Guidance, Navigation and Control Conference and Exhibit*, Hilton Head, South Carolina, USA, 2007. 20-23
- [12] Gao S L, Wu J T. Signal measuring of hemispherical resonator gyro(HRG) based on whole angle(WA) mode. *Chinese Journal of Sensors and Actuators*, 2006,19(1): 153-156

Quadrature-control of hemispherical resonator gyros under force-rebalance mode

Zhao Hongbo, Ren Shunqing

(Space Control and Inertial Technology Research Center, Harbin Institute of Technology, Harbin 150001)

Abstract

The concepts of general-control and quadrature-control for hemispherical resonator gyros (HRG) under the force-rebalance mode were introduced, and then the azimuth of radial vibration antinode on the hemispherical resonator's verge was deduced. After that, the state equation about vibration displacement and velocity was established on the basis of the dynamics equations of the resonator with the density distributed nonuniformity in the circular direction. Later on, the analytic solutions of the vibration displacement and the velocity were achieved by solving this state equation. Finally the ratio expressions of main excitation and rebalance excitation were derived under both of the two working modes, thus the input angular rate of HRG was obtained. It was proved that by comparing and calculating the angular rate outputs under these two modes, the errors caused by machining defects were greatly inhibited under the quadrature control mode. The range of fourth harmonic error about density's nonuniformity was given to ensure the accuracy of HRG under these two modes.

Key words: hemispherical resonator gyro (HRG), force-rebalance mode, density distribution nonuniformity, quadrature-control