

基于 Bloch 球面搜索的量子蚁群优化算法^①李盼池^② 王海英

(东北石油大学计算机与信息技术学院 大庆 163318)

摘 要 为提高蚁群算法的优化效率,提出一种基于 Bloch 球面搜索的量子蚁群优化算法。该算法用 Bloch 球面描述的量子比特对蚂蚁位置编码,用信息素强度和启发式信息构造的选择概率选择蚂蚁的移动目标,用量子比特在 Bloch 球面上的绕轴旋转实现蚂蚁移动,用 Hadamard 门实现变异以避免早熟收敛,在移动后的新位置完成信息素和启发式信息的更新。仿真结果表明该方法的搜索能力和优化效率优于其他量子智能优化算法。

关键词 蚁群优化,量子蚁群优化,Bloch 球面坐标,Bloch 球面搜索,算法设计

0 引 言

蚁群优化是智能优化领域的重要分支,目前国内外学者在算法设计上已进行了很多成功的尝试。文献[1]将差分进化思想融合到蚁群优化中,以 PID 参数优化为例显示了改进算法的有效性。为避免因陷入局部最优解而导致早熟收敛,文献[2]通过引入遗传算法的变异操作,提出了变异蚁群优化算法,TSP 仿真结果显示了该改进算法的优良性能。文献[3]通过采用增量学习动态改变高斯概率密度函数,提出了用于连续优化的蚁群算法。文献[4]提出了两阶段更新信息素方法,在第一阶段采用多个高适应度解,共同更新当前蚂蚁信息素,以提高搜索能力,在第二阶段只采用全局最优解更新当前蚂蚁信息素,以提高收敛速度。由此可见,如何提高蚁群算法的优化性能日益成为一个备受关注的研究方向。

量子智能优化算法是量子计算和信息科学相结合的新兴交叉学科。自从 1996 年文献[5]将量子多宇宙的概念引入进化计算,提出量子衍生遗传算法以来,量子智能优化算法迅速成为国际上研究的热点。本世纪初,文献[6-8]相继提出了多种量子遗传算法,与传统遗传算法相比,其优点是具有更好的保持种群多样性的能力。2006 年以来,我们基于直接采用量子位的概率幅实现个体编码的思想,相继

提出了适用于连续空间优化的量子蚁群算法^[9]、量子粒子群算法^[10]、混沌量子免疫算法^[11]等。2012 年,文献[12]提出了用量子位对蚂蚁编码,用量子旋转门实现蚂蚁移动的量子蚁群算法,其原理等同于普通量子遗传算法。上述各种算法,个体编码均采用基于平面单位圆描述的量子位,只有一个可调参数,量子特性没有得到充分体现;种群进化和变异均采用量子旋转门和量子非门,同样只改变量子位的一个参数,因此量子特性被削弱。2008 年,我们提出一种基于量子位 Bloch 坐标编码的量子遗传算法^[13],该方法具有两个可调参数,显示了良好的优化性能,但在算法中两个参数采用了分别进化的方式,没有解决两个参数调整量之间的协调问题,从而限制了优化能力的进一步提高。基于以上问题,本文选择蚁群优化作为切入点,提出一种基于 Bloch 球面搜索的量子蚁群优化(Bloch spherical search based Quantum Ant Colony Optimization, BQACO)算法。该算法直接采用基于 Bloch 球面描述的量子位编码,用泡利矩阵建立旋转轴,用量子位在 Bloch 球面上的绕轴旋转实现蚂蚁移动,用 Hadamard 门实现变异。该方法可同时调整量子位的两个参数,并可实现两个调整量之间的最佳匹配。本研究用典型函数的极值优化和模糊控制器参数优化进行仿真,并通过与其他算法对比,验证了 BQACO 算法的有效性。

① 国家自然科学基金(61170132)资助项目。

② 男,1969 年生,博士,教授;研究方向:量子智能优化,量子神经网络;联系人,E-mail: lipanchi@vip.sina.com
(收稿日期:2012-06-04)

1 BQACO 基本原理

1.1 量子比特的 Bloch 球面描述^[14]

在量子计算中,一个量子比特是一个可以在二维复希尔伯特空间中描述的两能级量子体系,根据叠加原理,量子比特的任何态都可以写成

$$|\varphi\rangle = \cos\frac{\theta}{2}|0\rangle + e^{i\phi}\sin\frac{\theta}{2}|1\rangle \quad (1)$$

其中 $0 \leq \theta \leq \pi$, $0 \leq \phi \leq 2\pi$ 。

因此,不同于经典比特,量子比特属于一个由连续变量 θ 和 ϕ 所刻画的矢量空间,且一个量子比特可以描述多个不同的状态。量子比特可以借助 Bloch 球描述,该球为量子比特及对量子比特状态所进行的变换提供了几何图像。具体而言,量子比特可以用嵌入三维笛卡儿坐标系中的 Bloch 球面上的一个点来描述,如图 1 所示。图中 $x = \cos\phi\sin\theta$, $y = \sin\phi\sin\theta$, $z = \cos\theta$ 。这样,量子态 $|\varphi\rangle$ 可以写成

$$|\varphi\rangle = \left[\sqrt{\frac{1+z}{2}}, \frac{x+iy}{\sqrt{2(1+z)}} \right]^T \quad (2)$$

因此, Bloch 球面上的任意点 $P(x, y, z)$ 与量子比特 $|\varphi\rangle$ 一一对应。

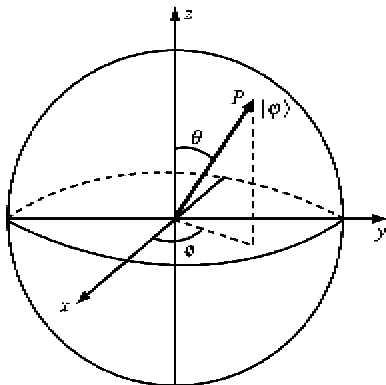


图 1 量子比特的 Bloch 球面表示

1.2 BQACO 的编码方式

在 BQACO 中,蚂蚁采用基于 Bloch 球面描述的量子比特编码。设种群规模为 m , 优化空间为 n 维,则第 i 个蚂蚁可编码为

$$p_i = [|\varphi_{i1}\rangle, |\varphi_{i2}\rangle, \dots, |\varphi_{in}\rangle] \quad (3)$$

其中 $|\varphi_{ij}\rangle$ 按式(1)定义。由式(3)可知,这种编码方式使优化过程统一在 Bloch 球面上进行,与具体优化问题无关,从而在种群初始化时可不考虑解变量的初始范围,便于设计统一的优化策略。

1.3 蚂蚁位置的投影测量

根据量子计算原理,一个量子比特 $|\varphi\rangle$ 的

Bloch 坐标 (x, y, z) 可以利用 $|\varphi\rangle$ 在计算基矢上的泡利矩阵

$$\sigma_x = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \sigma_y = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \sigma_z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (4)$$

通过投影测量获得^[14]。

对于第 i 个蚂蚁上的第 j 个量子比特 $|\varphi_{ij}\rangle$, 其坐标的投影测量计算式为

$$x_{ij} = \langle \varphi_{ij} | \sigma_x | \varphi_{ij} \rangle = \langle \varphi_{ij} | \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} | \varphi_{ij} \rangle \quad (5)$$

$$y_{ij} = \langle \varphi_{ij} | \sigma_y | \varphi_{ij} \rangle = \langle \varphi_{ij} | \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} | \varphi_{ij} \rangle \quad (6)$$

$$z_{ij} = \langle \varphi_{ij} | \sigma_z | \varphi_{ij} \rangle = \langle \varphi_{ij} | \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} | \varphi_{ij} \rangle \quad (7)$$

1.4 解空间变换

在 BQACO 中,每个蚂蚁均包含 3 组 (x 组, y 组, z 组) Bloch 坐标,每组坐标代表一个优化解。由于 Bloch 坐标位于区间 $[-1, 1]$, 因此需要进行解空间变换。记待优化问题第 j 维变量的取值区间为 $[A_j, B_j]$, 则解空间变换为如下三式:

$$X_{ij} = \frac{1}{2}[A_j(1 - x_{ij}) + B_j(1 + x_{ij})] \quad (8)$$

$$Y_{ij} = \frac{1}{2}[A_j(1 - y_{ij}) + B_j(1 + y_{ij})] \quad (9)$$

$$Z_{ij} = \frac{1}{2}[A_j(1 - z_{ij}) + B_j(1 + z_{ij})] \quad (10)$$

其中 $i = 1, 2, \dots, m$; $j = 1, 2, \dots, n$ 。

1.5 选择目标位置

设 $\tau(x_r)$ 为第 r 只蚂蚁在位置 x_r 处的信息素强度,初始时刻全部设为某个常数; $\eta(x_r)$ 为 x_r 处的启发式信息。蚂蚁由位置 x_r 转移到位置 x_s 的移动规则为

$$x_s = \begin{cases} \arg \max_{x_s \in X} \{ [\tau(x_s)]^\alpha [\eta(x_s)]^\beta \}, & q \leq q_0 \\ \bar{x}_s, & q > q_0 \end{cases} \quad (11)$$

$$p(x_s) = \frac{[\tau(x_s)]^\alpha [\eta(x_s)]^\beta}{\sum_{x_u \in X} [\tau(x_u)]^\alpha [\eta(x_u)]^\beta} \quad (12)$$

其中 q 为在 $(0, 1)$ 区间均匀分布的随机数, $0 \leq q_0 \leq 1$ 为常数, X 为蚁群在空间 $[-1, 1]^n$ 中占据的点的集合; $\bar{x}_s$ 为按式(12)选择的目标位置。

1.6 蚂蚁向目标位置的移动

目前大多数量子智能优化算法,进化机制均采用量子旋转门实现。这种旋转实质上是基于平面上的单位圆建立搜索机制,使量子比特在单位圆上绕原点旋转,且仅仅改变量子比特的一个参数 θ , 因此量子特性被削弱。在 BQACO 中,我们将在 Bloch 球面上实现搜索,即使量子比特在 Bloch 球面上绕着某一固定轴向着目标比特旋转。这种旋转可同时改变量子比特的两个参数 θ 和 ϕ , 并可自动实现两个调整量的最佳匹配,从而可更好地模拟量子行为,并可提高优化能力和优化效率。

设蚂蚁当前位置为 x_r , 目标位置为 x_s , 其量子比特描述分别为

$$x_r = [|\varphi_{r1}\rangle, |\varphi_{r2}\rangle, \dots, |\varphi_{rm}\rangle] \quad (13)$$

$$x_s = [|\varphi_{s1}\rangle, |\varphi_{s2}\rangle, \dots, |\varphi_{sn}\rangle] \quad (14)$$

为使蚂蚁在 Bloch 球面上从 x_r 向着 x_s 旋转,旋转轴 R_{axis} 的方向和旋转角度 δ 的大小至关重要,直接影响到算法的寻优方向和收敛速度。关于旋转轴 R_{axis} 的确定,我们提出如下方法。

定理 1 记 Bloch 球面上两点 P 和 Q 对应的向量分别为 $P = [p_x, p_y, p_z]$ 和 $Q = [q_x, q_y, q_z]$, 则在 Bloch 球面上量子比特由点 P 转向点 Q 的旋转轴为 $R_{axis} = P \times Q$ 。

证明: 因为两点间的球面距离,以过该两点的球大圆上的劣弧最短,所以,为使 P 旋转后逼近 Q , 应使 P 沿着球大圆的劣弧移动。而轴 R_{axis} 为 P 和 Q 的向量积,由向量积的定义, R_{axis} 的方向为垂直于向量 P 和 Q 组成的平面,且其指向与 P 和 Q 的指向满足右手定则,即右手四指以小于 π 的角度从 P 握向 Q , 拇指指向即为 R_{axis} 的方向,如图 2 所示。因此,若使 $\vec{P}$ 绕着轴 R_{axis} 旋转,其轨迹恰好为 Bloch 球大圆上的劣弧,即旋转轴为 R_{axis} 。证毕。

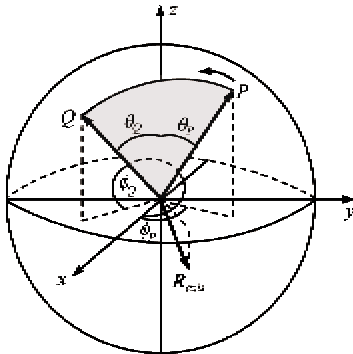


图 2 量子比特的 Bloch 球面旋转轴

令 O 为 Bloch 球心,量子比特 $|\varphi_{ij}\rangle$ 和 $|\varphi_{sj}\rangle$ 在 Bloch 球面上的对应点分别为 P 和 Q , 根据上述定理, $|\varphi_{ij}\rangle$ 向着 $|\varphi_{sj}\rangle$ 转动的旋转轴为

$$R_{axis} = \frac{OP \times OQ}{\|OP \times OQ\|} \quad (15)$$

根据量子计算原理,在 Bloch 球面上,绕一个沿单位矢量 $n = [n_x, n_y, n_z]$ 的轴转动 δ 弧度的旋转矩阵为^[14]

$$R_n(\delta) = \cos \frac{\delta}{2} I - i \sin \frac{\delta}{2} (n \times \sigma) \quad (16)$$

其中 I 是单位矩阵, $\sigma = [\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z]$ 。因此,当前量子比特 $|\varphi_{ij}\rangle$ 在 Bloch 球面上,绕轴 R_{axis} 转向 $|\varphi_{sj}\rangle$ 的旋转矩阵为

$$M_{R_{axis}}(\delta) = \cos \frac{\delta}{2} I - i \sin \frac{\delta}{2} (R_{axis} \times \sigma) \quad (17)$$

其中转角步长一般可取 $\delta \leq 0.05\pi$ 。

当前比特 $|\varphi_{ij}\rangle$ 转向目标比特 $|\varphi_{sj}\rangle$ 的旋转旋操作作为

$$|\varphi_{ij}(k+1)\rangle = M_{R_{axis}}(\delta) |\varphi_{ij}(k)\rangle \quad (18)$$

其中 $r = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n; k$ 为迭代步数。

对于蚁群中的每个蚂蚁,移动方法如下:对于当前位置的每个量子比特,分别根据目标位置上相应的量子比特确定旋转轴,实施绕轴旋转,完成该蚂蚁的移动。按上述方法依次更新所有位置完成蚁群更新。

1.7 蚂蚁位置的变异

为了增加蚁群多样性,防止早熟收敛,各种进化算法都引入变异操作。目前的各种量子进化算法,大都使用量子非门即泡利矩阵 σ_x 实施变异,其功能为在单位圆上交换量子比特的两个概率幅,这种变异同样只改变量子比特的一个参数。在 BQACO 中,我们提出基于 Hadamard 门的蚂蚁量子比特变异方法。Hadamard 门的定义如下:

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad (19)$$

该门是量子计算中比较重要的一个酉算子,可以写成两个泡利矩阵的线性组合且具有如下性质^[14]:

$$-iH = \cos \frac{\pi}{2} I - i \sin \frac{\pi}{2} \left(\frac{\sigma_z}{\sqrt{2}} + 0\sigma_y + \frac{\sigma_x}{\sqrt{2}} \right) \quad (20)$$

由上式可知,除了一个没有观测效应的整体相位之外, Hadamard 门是一个在 Bloch 球面上绕下式定义的旋转轴 n 做角度为 $\delta = \pi$ 的旋转:

$$n = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \quad (21)$$

旋转的结果等价于将 x 轴变为 z 轴, 将 z 轴变为 x 轴。由于这种旋转与目标位置无关, 且幅度较大, 因此有助于增加蚁群多样性, 进而突破早熟收敛。对于蚁群中的每个蚂蚁, 首先生成一个随机数, 若该数小于变异概率, 则在该蚂蚁上随机选取一个量子比特, 然后应用 Hadamard 门对其实施变异。

1.8 信息素强度及启发式信息更新规则

在 BQACO 中, 信息素强度的更新思想是把反映蚂蚁当前位置优劣程度的适应度函数值融合到信息素中, 使越是优良的位置其上信息素强度越高; 把适应度函数的变化信息融合到启发式信息中, 使变化越快的位置, 启发式信息也越强。每只蚂蚁完成一步搜索之后, 计算新位置的适应度函数值及适应度变化值, 按下列各式进行蚂蚁当前位置信息素强度和启发式信息的局部更新。记蚂蚁前一位置为 x_q , 当前位置为 x_r , 移动后的位置为 x_s , 局部更新规则为

$$\tau(x_s) = (1 - \rho)\tau(x_s) + \rho \times fit^\alpha \quad (22)$$

$$\eta(x_s) = (1 - \rho)\eta(x_s) + \rho \times |\Delta fit|^\beta \quad (23)$$

$$\Delta fit = fit(x_s) - fit(x_r) \quad (24)$$

其中 $0 < \alpha < 1, 0 < \beta < 1$ 为信息素和启发式信息的更新指数, $0 < \rho < 1$ 为信息素和启发式信息的更新系数, $1 - \rho$ 为存留系数。所有蚂蚁完成一步移动之后, 按下式进行信息素和启发式信息的全局更新:

$$\tau(x_u) = \begin{cases} (1 - \rho)\tau(x_u) + \rho fit(x_u), & x_u = \bar{x} \\ (1 - \rho)\tau(x_u), & x_u \neq \bar{x} \end{cases} \quad (25)$$

$$\eta(x_u) = \begin{cases} (1 - \rho)\eta(x_u) + \rho fit(x_u), & x_u = \bar{x} \\ (1 - \rho)\eta(x_u), & x_u \neq \bar{x} \end{cases} \quad (26)$$

其中 $\bar{x}$ 为当前得到的最优解。

关于适应度函数的选择, 可视具体优化问题而定, 若优化为求取目标函数 F 的极大值, 一般可取 $fit = \exp(F)$, 若为求取 F 的极小值, 一般可取 $fit = \exp(-F)$ 。

1.9 种群评估及最优解更新

将每只蚂蚁对应的三组解 X_{ij}, Y_{ij}, Z_{ij} 代入适应度函数计算该蚂蚁的适应度。令 $gfit_{best}$ 为到目前为止获得的最佳适应度, gp_{best} 为相应的最佳蚂蚁。

记 $fit(p_i) = \max(fit(X_i), fit(Y_i), fit(Z_i))$, $fit_{best} = \max_{1 \leq i \leq m}(fit(p_i))$, 若 $gfit_{best} < fit_{best}$, 则 $gfit_{best}$

$$= fit_{best}, gp_{best} = p_{best}$$

1.10 BQACO 的计算复杂度

从 BQACO 的实施过程可知, 此算法只比普通蚁群算法增加了 4 种计算: 测量、解空间变换、旋转轴、旋转矩阵。其中, 解空间变换属于数轴上的线性变换, 测量、旋转轴和旋转矩阵都是简单的二阶矩阵或向量之间的乘法运算。由于这些操作的计算量都是问题规模的多项式函数, 因此 BQACO 的计算复杂度与普通蚁群算法是同阶的。

2 BQACO 实施方案

步骤 1 设置蚁群规模 m ; 量子位数 n ; 转角步长 δ ; 变异概率 p_m ; 限定代数 G ; 信息素更新指数 α ; 启发式信息更新指数 β ; 存留系数 $1 - \rho$ 。按式(3)产生初始蚁群; 为每只蚂蚁的信息素强度和启发式信息赋予某一初始值; 置当前代数 $t = 0$ 。

步骤 2 对每只蚂蚁按式(11)、(12)选择移动目标, 按式(15)确定旋转轴, 按式(17)计算旋转矩阵, 按式(19)实施量子比特的绕轴旋转, 以实现蚂蚁移动, 按变异概率用 Hadamard 门实施变异。

步骤 3 按式(5) - (7)实施蚂蚁位置的投影测量, 按式(8) - (10)实施解空间变换, 计算每只蚂蚁的适应度函数值及其变化值。

步骤 4 按式(22) - (24)完成信息素强度及启发式信息的局部更新。按式(25)、(26)完成信息素强度和启发式信息的全局更新。

步骤 5 实施种群评估及最优解更新, 置 $t = t + 1$ 。若 $t > G$, 输出结果, 停机; 否则转步骤 2。

3 BQACO 的收敛性

本节应用马尔可夫链相关理论证明 BQACO 的收敛性。

令 $Q_t = \{p_1^t, p_2^t, \dots, p_m^t\}$ 为 BQACO 的第 t 代种群, 其中第 i 个蚂蚁 p_i^t 的编码为

$$p_i^t = \begin{bmatrix} \cos \frac{\theta_{i1}^t}{2} & \dots & \cos \frac{\theta_{im}^t}{2} \\ e^{i\phi_{i1}^t} \cos \frac{\theta_{i1}^t}{2} & \dots & e^{i\phi_{im}^t} \cos \frac{\theta_{im}^t}{2} \end{bmatrix} \quad (27)$$

引理 1 BQACO 的种群序列 $\{Q_t, t \geq 1\}$ 是有限齐次马尔可夫链。

证明: 令种群规模为 m , 优化空间为 n 维。由于 θ 和 ϕ 是连续变量, 因此, 理论上种群状态空间的

个数是无限的。但在实际计算中, θ 和 φ 都是有限精度的, 令其维数分别为 v_1 和 v_2 , 则种群 Q_t 可能的状态数为 $(v_1 v_2)^m$ 。因此, 种群的状态数是有限的。而算法中用于种群更新的“移动”、“变异”、“信息素更新”等策略能够保证 Q_{t+1} 仅与前代 Q_t 有关。因此, $\{Q_t, t \geq 1\}$ 是有限齐次马尔可夫链。证毕。

记第 k 个种群状态 Q^k 中的最佳蚂蚁为 $bp_k = \max_{p_i \in Q^k} \{fit(p_i), 1 \leq k \leq (v_1 v_2)^m\}$, 随机过程 $\{Q_t, t \geq 1\}$ 的一步转移概率为 $P_t(i, j) = P(Q_t^i \rightarrow Q_{t+1}^j)$ 。关于 BQACO 的收敛性, 我们有如下结论。

定理 2 BQACO 是以概率 1 收敛的。

证明: 令 $K = \{k | fit(bp_k) \neq fit^*\}$, fit^* 为全局最佳适应度。当状态发生一步转移 $Q_t^i \rightarrow Q_{t+1}^j$ 时, 因为 BQACO 中采用了精英保留策略, 所以 $fit(bp_j) \geq fit(bp_i)$ 。故当 $i \notin K, j \in K$ 时, $P_t(i, j) = 0$; 当 $i \in K, j \notin K$ 时, $P_t(i, j) \geq 0$ 。

设 $P_t(i)$ 为种群 Q_t 处于状态 i 的概率, 记 $P_t = \sum_{i \in K} P_t(i)$, 由马尔可夫链的性质可知, Q_{t+1} 处于状态 $j \in K$ 的概率为 $P_{t+1}(j) = \sum_{i \in K} \sum_{j \in K} P_t(i) P_t(i, j) + \sum_{i \notin K} \sum_{j \in K} P_t(i) P_t(i, j) = \sum_{i \in K} \sum_{j \in K} P_t(i) P_t(i, j)$, 由 $P_t = \sum_{i \in K} \sum_{j \in K} P_t(i) P_t(i, j) + \sum_{i \in K} \sum_{j \notin K} P_t(i) P_t(i, j)$, 得 $P_{t+1}(j) = P_t - \sum_{i \in K} \sum_{j \notin K} P_t(i) P_t(i, j) \leq P_t$, 故 $\lim_{t \rightarrow \infty} P_t(j) = 0$, 即 $t \rightarrow \infty$ 时 Q_t 仍然处于状态 $j \in K$ 的概率 $P_t(j) = 0$ 。从而 $\lim_{t \rightarrow \infty} P(j \notin K) = 1 - \lim_{t \rightarrow \infty} P_t(j \in K) = 1$, 即 BQACO 是以概率 1 收敛的。证毕。

由证明过程可知, 定理的成立所依赖的一个前提条件是, BQACO 必须采用精英保留策略, 否则不能保证 $fit(bp_j) \geq fit(bp_i)$ 成立, 即不能保证种群最佳适应度的单调上升, 从而也不能保证定理结论的成立。

4 对比实验

4.1 函数极值优化

本实验采用 Shaffers F5、Shubert、Branin 和 Camel 4 个典型函数作为仿真对象, 并与文献[9]中的连续量子蚁群算法 (Continuous quantum ant algorithm, CQACA)、文献[13]中的 Bloch 坐标量子遗传算法 (Bloch quantum genetic algorithm, BQGA) 进行对比

分析。

(1) Shaffers F5 函数

$$f(x_i) = \frac{1}{500} + \sum_{j=1}^{25} \frac{1}{j + \sum_{i=1}^2 (x_i - a_{ij})^6} \quad (28)$$

其中 $x_i \in (-65.536, 65.536)$,

$$(a_{ij}^k) = \begin{pmatrix} -32 & -16 & 0 \\ -32 + 16k & -32 + 16k & -32 + 16k \\ 16 & 32 \\ -32 + 16k & -32 + 16k \end{pmatrix},$$

$$(a_{ij}) = (a_{ij}^0, a_{ij}^1, a_{ij}^2, a_{ij}^3, a_{ij}^4).$$

此函数有多个局部极大点, 全局极大点为 $(-32, -32)$, 全局极大值为 1.002, 当优化结果大于 1.000 时认为算法收敛。

(2) Shubert 函数

$$f(x, y) = \left\{ \sum_{i=1}^5 \cos[(i+1)x + i] \right\} \times \left\{ \sum_{i=1}^5 \cos[(i+1)y + i] \right\} \quad (29)$$

其中 $x, y \in [-10, 10]$ 。此函数有 760 个局部极小值点, 其中只有一个为全局最小, 全局最小值为 -186.73090882259。此函数极易陷入局部极小值 -186.34。当优化结果小于 -186.34 时认为算法收敛。

(3) Branin 函数

$$f(x, y) = \left(x - \frac{5.1}{4\pi} y^2 + \frac{5}{\pi} y - 6\right)^2 + 10 \left(1 - \frac{1}{8\pi}\right) \cos y + 10 \quad (30)$$

其中 $x \in [0, 15], y \in [-5, 10]$ 。此函数全局极小值为 0.3979, 一个与全局极小值很接近的局部极小值为 0.4004。当优化结果小于 0.4000 时认为算法收敛。

(4) Camel 函数

$$f(x, y) = (4 - 4x^2)x^2 - xy - (4 - 2.1y^2 + \frac{y^4}{3})y^2 \quad (31)$$

其中 $x, y \in [-10, 10]$, 优化目标为求取函数极大值。此函数全局极大值为 1.031628, 当优化结果大于 1.000 时认为算法收敛。

对于以上 4 个函数, 分别用 BQACO、CQACA、BQGA 优化, 为体现对比结果的公正性, 三种算法采用相同的种群规模、变异概率、转角步长、进化代数, BQACO 和 CQACA 采用形同的信息素更新指数、存留系数、概率参数。具体设置如下: 蚁群规模 $m = 20$; 量子位数 $n = 2$; 限定步数 $G = 100$; 概率参数

$q_0 = 0.8$; 存留系数 $1 - \rho = 0.5$; 信息素更新指数 $\alpha = 0.5$; 启发式信息更新指数 $\beta = 0.5$; 转角步长 $\delta = 0.01\pi$; 变异概率 $p_m = 0.001$ 。

为体现对比结果的客观性,对于以上 4 个函数,分别用每种算法运行 1000 次,并记录收敛次数、平均步数、平均结果等评价指标,对于收敛的情况,还分别统计收敛到 X 解、 Y 解、 Z 解的次数。实验结果如表 1 – 表 4 所示。对于 Shaffers F5 函数,用 BQACO 优化后蚁群在解空间释放的信息素强度分布如图 3 所示。

表 1 Shaffers F5 优化结果对比

算法	收敛次数	X 解	Y 解	Z 解	平均步数	平均结果
BQACO	784	311	280	193	66.12	0.8970
CQACA	328	174	154	–	89.24	0.7534
BQGA	723	289	266	168	68.73	0.9044

表 2 Shubert 优化结果对比

算法	收敛次数	X 解	Y 解	Z 解	平均步数	平均结果
BQACO	944	343	310	291	61.65	-186.48
CQACA	334	157	177	–	87.12	-184.81
BQGA	543	197	193	153	76.53	-186.07

表 3 Branin 优化结果对比

算法	收敛次数	X 解	Y 解	Z 解	平均步数	平均结果
BQACO	996	321	286	389	49.84	0.3990
CQACA	489	242	247	–	80.01	0.4018
BQGA	826	266	239	321	58.98	0.3995

表 4 Camel 优化结果对比

算法	收敛次数	X 解	Y 解	Z 解	平均步数	平均结果
BQACO	999	451	431	117	36.5520	1.0143
CQACA	658	314	344	–	75.8260	-8.5867
BQGA	947	360	344	243	44.6050	1.0109

由表 1 – 表 4 可知,对于连续优化问题,三种模型优化能力的排序是一致的。由高到低依次为 BQACO、BQGA、CQACA。对于这种结果可作如下分析。

对于 CQACA,蚂蚁采用基于平面上单位圆描述的量子位编码,量子位只有一个可调参数,量子行为不能充分体现,所以其优化效率最低。

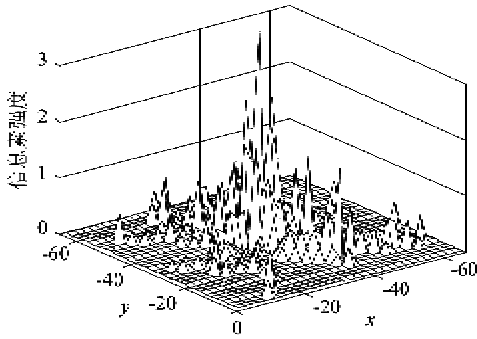


图 3 Shaffers F5 的信息素分布

对于 BQGA,由于直接采用量子位的 Bloch 坐标对蚂蚁编码,从而将量子位的平面单位圆描述拓展到 Bloch 球面描述,使量子行为得以充分体现,因而有效提高了搜索能力,致使其优化效率明显优于 CQACA。但在 BQGA 中,量子位的两个参数 θ 和 ϕ 是分别调整的,因此存在两个调整量的最佳匹配问题。而在 BQGA 中,对 θ 和 ϕ 的调整并没有考虑最佳匹配问题,反映到 Bloch 球面上,即是当量子位在 Bloch 球面上向着目标量子位移动时,经过的不是最短路径。

对于 BQACO,蚂蚁也采用基于 Bloch 球面描述的量子位编码,因此具有 BQGA 的全部优点。但是,特别值得指出的是,在 BQACO 中,通过使当前量子位绕着某一旋转轴向目标量子位旋转,可同时调整量子位的 θ 和 ϕ 这两个参数,并且通过量子位的投影测量可直接得到相应的 Bloch 坐标,圆满实现了量子位调整中两个参数调整量的最佳匹配。这种最佳匹配的效果反映在 Bloch 球面上,即是当量子位在 Bloch 球面上向着目标量子位移动时,经过的路径为过当前量子位和目标量子的 Bloch 球大圆上的劣弧。显然,这种具有最佳匹配的旋转具有更高的优化效率。因此 BQACO 的优化效率高于 BQGA,并且是三种模型中优化效率最高的。以上分析与实验结果是一致的。

4.2 模糊控制器参数优化

在模糊控制器的设计中,控制作用 u 取决于误差 E 及误差变化 EC ,为适应不同被控对象的要求,通过引进一个调整因子 α ,可得到一种带有调整因子的解析描述的模糊控制规则,其形式如下:

$$u = - \langle \alpha E + (1 - \alpha) EC \rangle, \quad \alpha \in (0,1) \quad (32)$$

通过调整 α 的大小,可以实现对 E 和 EC 不同程度的加权。当 E 较大时,控制任务主要是消除误差,此时应加大对 E 的加权;相反,当 E 较小时,控制任务主要是减少超调以使系统尽快稳定,此时应

加大对 EC 的加权。因此,在不同的误差等级,需要引入不同的加权因子,以实现控制规则的自调整。

以二阶系统 $F(s) = \frac{20}{(2s+1)(4s+1)}$ 为被控对象,输入为阶跃信号,误差、误差变化、控制量的论域为

$$\{E\} = \{EC\} = \{u\} = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\} \quad (33)$$

考虑到模糊控制系统在不同状态下对控制规则中的 α 应该有不同要求,实验中将 α 分为三级:

$$u = \begin{cases} -(\alpha_1 E + (1 - \alpha_1) EC) & E = 0, \pm 1 \\ -(\alpha_2 E + (1 - \alpha_2) EC) & E = \pm 2 \\ -(\alpha_3 E + (1 - \alpha_3) EC) & E = \pm 3 \end{cases} \quad (34)$$

因此,本实验需要同时优化 6 个模糊控制器参数:量化因子 ke, kc ; 比例因子 ku ; 调整因子 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 。

应用 ITAE 积分性能指标设计评价函数

$$f = \frac{1}{a + J(ITAE)} \quad (35)$$

其中 $J(ITAE) = \int_0^T te(t) dt$, a 为某一小正数以使分母不为零。根据经验,6 个待优化控制器参数的初始范围确定如下: $\alpha_1 \in (0, 0.4)$; $\alpha_2 \in (0.4, 0.8)$; $\alpha_3 \in (0.8, 1.0)$; $ke, kc, ku \in (0, 10)$ 。

分别用 BQACO、CQACA、BQGA 优化上述参数。算法参数 $m = 15, n = 6, G = 50$, 其它参数设置同前。三种算法的优化结果对比如表 5 所示,优化过程的 ITAE 性能指标对比如图 4 所示,在三种算法优化的模糊控制器的控制下,二阶系统 $F(s)$ 对于阶跃输入的跟踪响应对比如图 5 所示。

表 5 模糊控制器参数优化结果对比

算法	ke	kc	ku	α_1	α_2	α_3	J
BQACO	4.50	2.73	9.97	0.25	0.48	0.92	3.95
CQACA	4.26	3.78	4.19	0.37	0.51	0.98	5.45
BQGA	6.16	5.68	6.30	0.08	0.47	0.89	4.83

由表 5 可知,在相同种群规模和迭代步数条件下, BQACO 的 ITAE 指标最小,其次是 BQGA 和 CQACA。

由图 4 可知, BQACO 在大约 20 步迭代后 ITAE 指标即达到最小值 3.9503, 而 BQGA 和 CQACA 经过 50 步迭代后仅为 4.8329 和 5.4465。由图 5 可知, BQACO 优化的控制器比 BQGA 和 CQACA 有更快

的跟踪速度和更少的跟踪时间,从而表明 BQACO 比 BQGA 和 CQACA 搜索到了更加优良的控制器参数组合,从而使模糊控制器有更加优良的控制性能。实验结果表明, BQACO 的优化能力的确优于 CQACA 和 BQGA。

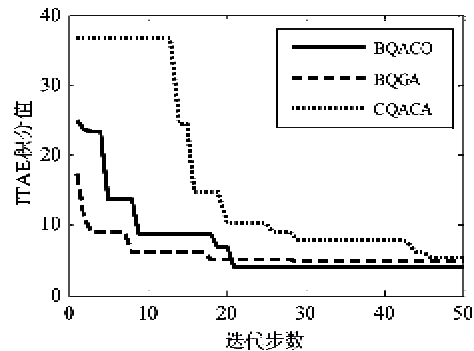


图 4 ITAE 积分指标对比

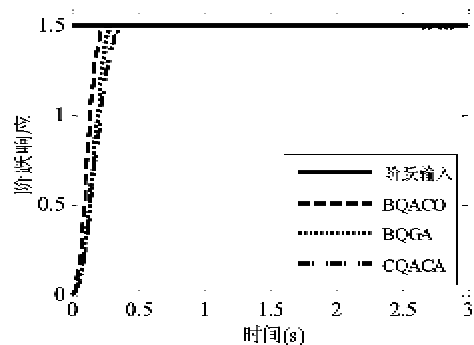


图 5 阶跃响应曲线对比

5 结论

提出了一种基于 Bloch 球面搜索的量子蚁群算法。实验结果表明,该算法比同类算法在搜索能力和搜索效率两方面均有较大提高,从而揭示出基于蚁群觅食行为建立搜索机制,基于 Bloch 球面描述的量子位实现个体编码,和使量子位两参数的调整量具有最佳匹配的绕轴旋转方法,这三者的有机融合,切实能够提高智能优化算法的优化能力。另外,该算法可将不同尺度空间优化问题统一划归为 $[-1, 1]^n$ 内的优化问题,从而提高了算法对不同尺度空间优化问题的适应能力。

参考文献

- [1] Leandro S C, Diego L A. A modified ant colony optimization algorithm based on differential evolution for chaotic synchronization. *Expert Systems with Applications*, 2010,

- 37: 4198-4203
- [2] Zhao N, Wu Z L, Zhao Y Q. Ant colony optimization algorithm with mutation mechanism and its applications. *Expert Systems with Applications*, 2010, 37: 4805-4810
 - [3] Xiao J, Li L P. A hybrid ant colony optimization for continuous domains. *Expert Systems with Applications*, 2011, 38: 11072-11077
 - [4] Zhang Z J, Feng Z R. Two-stage updating pheromone for invariant ant colony optimization algorithm. *Expert Systems with Applications*, 2012, 39: 706-712
 - [5] Narayanan A, Moore M. Quantum-inspired genetic algorithms. In: *Proceedings of IEEE International Conference on Evolutionary Computation*, Nagoya, Japan, 1996. 61-66
 - [6] Han K H, Kim J H. Genetic quantum algorithm and its application to combinational optimization problem. In: *Proceedings of IEEE International Congress on Evolutionary Computation*, La Jolla, USA, 2000. 1354-1360
 - [7] Han K H, Park K H, Lee C H. Parallel quantum-inspired genetic algorithm for combinatorial optimization problem. In: *Proceedings of IEEE International Congress on Evolutionary Computation*, Seoul, South Korea, 2001. 1422-1429
 - [8] Han K H, Kim J H. Quantum-inspired evolutionary algorithm for a class of combinational optimization. *IEEE Transactions on Evolutionary Computing*, 2002, 6(6): 580-593
 - [9] 李盼池, 李士勇. 求解连续空间优化问题的量子蚁群算法. *控制理论与应用*, 2008, 25(2): 237-241
 - [10] 李士勇, 李盼池. 求解连续空间优化问题的量子粒子群算法. *量子电子学报*, 2007, 24(5): 569-574
 - [11] 李盼池, 李士勇. 求解连续空间优化问题的混沌量子免疫算法. *模式识别与人工智能*, 2007, 20(5): 654-660
 - [12] Ma X L, Li Y G. An improved quantum ant colony algorithm and its application. *IERI Procedia*, 2012, 2: 522-527
 - [13] 李盼池. 基于量子位 Bloch 球面坐标的量子遗传算法及其应用. *控制理论与应用*, 2008, 25(6): 985-989
 - [14] Giuliano B, Giulio C, Giuliano S. *Principles of Quantum Computation and Information (Volume I: Basic Concepts)*. Singapore: World Scientific, 2004. 100-112

Quantum ant colony optimization based on Bloch spherical search

Li Panchi, Wang Haiying

(School of Computer & Information Technology, Northeast Petroleum University, Daqing 163318)

Abstract

To enhance the optimization efficiency of ant colony algorithms, a quantum ant colony optimization algorithm based on Bloch spherical search is proposed. When this algorithm works, ants' locations are encoded by the qubits described on the Bloch sphere, the ants' target locations are determined according to the selected probability constructed by the pheromone and the heuristic information, and the ants' movement is realized with the rotation of the qubits on the Bloch sphere. To avoid premature convergence, the mutation is performed with the Hadamard gates. The pheromone and the heuristic information are updated in the new location of ants. The simulation results show that the proposed algorithm is superior to other quantum intelligent optimization algorithms in both the search capability and the optimization efficiency.

Key words: ant colony optimization, quantum ant colony optimization, Bloch spherical coordinates, Bloch spherical search, algorithm design