

不确定关联量化系统的分散输出反馈 H_∞ 控制^①陈 宁^{②*} 沈晓瑜* 桂卫华* 翟资生**

(* 中南大学信息科学与工程学院 长沙 410083)

(** 芝浦工业大学数理科学系 埼玉 337-8570 日本)

摘 要 研究了不确定关联网络系统动态输出反馈分散 H_∞ 控制器和量化器的设计问题,提出了下述依赖于控制器状态和系统输出的量化控制策略。每个控制器的输出经过量化器量化后输入到子系统中。由于对数据量化而引起的量化效应使得原始信号和实际应用信号之间存在偏差,这些偏差会对系统的稳定性和性能产生重要影响。假设系统的输出反馈 H_∞ 控制器已经得到,采用动态量化器分别对控制器的状态、系统测量输出和控制输入进行量化,通过调节动态量化器的缩放参数,使得整个闭环系统渐进稳定并且仍能满足一定的 H_∞ 性能指标。控制器和量化器的参数都是以分散的形式得到。

关键词 关联网络系统, 动态输出反馈, 时变量化器, 分散控制, H_∞ 控制

0 引 言

近年来,随着网络控制系统的普及,带宽约束受到越来越多专家学者的关注,而信号量化是带宽约束的一个重要方面^[1-6]。为了减少信号通道的负担和尽可能减小信号的丢失,信号在传送到系统和控制器之前必须先经过量化。信号量化主要是针对系统的输入输出信号,按控制策略的不同也有所区别,主要有针对状态信号的量化、输入信号的量化和基于输出反馈的量化等^[7,8]。典型的量化器按所采用的方法主要有两类^[9,10]:均匀量化器和对数量化器。通常对数量化器的效果优于均匀量化器。上述两种量化器都属于静态且时不变的量化器,相对来说时变量化器是一种比较复杂的量化器,不过时变量化器的效果要比静态量化器好得多。这也是信号量化发展的趋势。但量化器的加入又使得系统接收到的信号与原信号存在一定的误差,从而对控制系统的稳定性和性能带来不利的影响,因此,研究量化的核心问题是如何利用有限的信息设计量化反馈控制器,使得整个闭环系统渐进稳定并满足一定的性能指标。

时变量化器最显著的优点就是可以通过改变动

态参数来调节量化水平,从而增大吸引域和减小稳定状态极限环。时变量化器分为两种,一种是由输出端的编码器和输入端的解码器组成的,可以通过有限的量化水平使得单输入单输出时不变线性系统稳定(在某种随机意义上);另一种是由动态调节参数和静态量化器组成。文献[7]定义了一个在有限集内取值的量化器,并且考虑了线性系统的量化反馈镇定问题。文献[8]研究了更广泛的量化器。但以上文献只考虑了系统的稳定性。基于此,文献[11]针对离散时间线性时不变系统,通过调节动态参数,使得系统稳定并且满足一定的 H_∞ 性能指标。文献[12]针对连续线性时不变系统,设计量化静态输出反馈控制器来镇定不确定关联网络系统。动态调节参数的思想在信号处理系统中经常使用,可以用来减小量化误差。本文采用动态输出反馈控制策略,对控制器状态、系统输出、控制输入分别进行量化,通过调节三个时变量化器的参数,使得整个闭环系统稳定并且满足一定的 H_∞ 扰动抑制水平。

1 问题的描述

考虑由如下两个子系统组成的关联网络系统:

① 国家自然科学基金(61074001)和中央高校基本科研业务费专项资金(2010QZZD016)资助项目。

② 女,1970年生,博士,教授;研究方向:关联网络系统的分散控制;联系人,E-mail: ningchen@csu.edu.cn
(收稿日期:2012-09-07)

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = (A_{11} + \Delta A_{11})x_1 + (A_{12} + \Delta A_{12})x_2 \\ \quad + B_{11}w_1 + B_{21}u_1 \\ z_1 = (C_1 + \Delta C_1)x_1 + D_1w_1 \\ y_1 = E_1x_1 \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} \dot{x}_2 = (A_{21} + \Delta A_{21})x_1 + (A_{22} + \Delta A_{22})x_2 \\ \quad + B_{12}w_2 + B_{22}u_2 \\ z_2 = (C_2 + \Delta C_2)x_2 + D_2w_2 \\ y_2 = E_2x_2 \end{cases} \quad (2)$$

其中 $x_1 \in R^{n_1}$ 且 $x_2 \in R^{n_2}$ 为子系统的状态; $u_1 \in R^{m_1}$ 且 $u_2 \in R^{m_2}$ 为控制输入; $w_1 \in R^{h_1}$ 、 $w_2 \in R^{h_2}$ 为扰动输入; $z_1 \in R^{p_1}$ 、 $z_2 \in R^{p_2}$ 为控制输出。假设 w_1 、 w_2 都在 $L_2 \in [0, \infty)$ 上, $L_2 \in [0, \infty)$ 是定义在区间 $(0, \infty)$ 上的平方可积函数空间。矩阵 A_{ij} 、 B_{ij} 、 C_i 、 D_i 、 E_i ($i, j = 1, 2$) 是具有适当维数的常量矩阵, 式(1)中的 $(A_{12} + \Delta A_{12})x_2$ 和式(2)中的 $(A_{21} + \Delta A_{21})x_1$ 是两个子系统之间的关联项。 ΔA_{ij} 和 ΔC_i 是系统模型中参数不确定的未知实矩阵, 且具有范数有界形式:

$$\Delta A_{ij} = K_i \delta_{ij} H_j, \Delta C_i = G_i \delta_i S_i (i, j = 1, 2) \quad (3)$$

其中 K_i 、 H_j 、 G_i 、 S_i 是已知的具有适当维数的常数矩阵, 反映了不确定参数的结构信息。 δ_{ij} 和 δ_i 为未知常数矩阵且满足

$$\bar{\delta}^T \bar{\delta} \leq I, \delta^T \delta \leq I \quad (4)$$

$$\text{其中 } \bar{\delta} = \begin{bmatrix} \delta W T B X_{11} & \delta_{12} \\ \delta_{21} & \delta_{22} \end{bmatrix}, \delta = \begin{bmatrix} \delta_1 & 0 \\ 0 & \delta_2 \end{bmatrix}.$$

整个系统可以描述为

$$\begin{cases} \dot{x} = (A + \Delta A)x + B_1 w + B_2 u \\ z = (C + \Delta C)x + D w \\ y = E x \end{cases} \quad (5)$$

其中 $x = [x_1^T, x_2^T]^T$, $w = [w_1^T, w_2^T]^T$, $z = [z_1^T, z_2^T]^T$, $y = [y_1^T, y_2^T]^T$, $u = [u_1^T, u_2^T]^T$ 且 $A = [A_{ij}]_{2 \times 2}$, $\Delta A = \begin{bmatrix} \Delta A_{11} & \Delta A_{12} \\ \Delta A_{21} & \Delta A_{22} \end{bmatrix}$, $B_1 = \begin{bmatrix} B_{11} & 0 \\ 0 & B_{12} \end{bmatrix}$,

$$B_2 = \begin{bmatrix} B_{21} & 0 \\ 0 & B_{22} \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} C_1 & 0 \\ 0 & C_2 \end{bmatrix}, \Delta C = \begin{bmatrix} \Delta C_1 & 0 \\ 0 & \Delta C_2 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} D_1 & 0 \\ 0 & D_2 \end{bmatrix}, E = \begin{bmatrix} E_1 & 0 \\ 0 & E_2 \end{bmatrix}.$$

假设不考虑量化器的分散动态输出反馈如下:

$$\begin{cases} \dot{x}_{cl} = A_{cl} x_{cl} + B_{cl} y_1 \\ u_1 = C_{cl} x_{cl} \end{cases} \quad (6a)$$

$$\begin{cases} \dot{x}_{c2} = A_{c2} x_{c2} + B_{c2} y_2 \\ u_2 = C_{c2} x_{c2} \end{cases} \quad (6b)$$

将控制器重写为

$$\begin{cases} \dot{x}_c = A_c x_c + B_c y \\ u = C_c x_c \end{cases} \quad (7)$$

其中 $x_c = [x_{cl}^T, x_{c2}^T]^T$, $A_c = \begin{bmatrix} A_{cl} & 0 \\ 0 & A_{c2} \end{bmatrix}$, $B_c =$

$$\begin{bmatrix} B_{cl} & 0 \\ 0 & B_{c2} \end{bmatrix}, C_c = \begin{bmatrix} C_{cl} & 0 \\ 0 & C_{c2} \end{bmatrix}.$$

闭环系统可以写为

$$\begin{cases} \dot{x}_{cl} = A_{cl} x_{cl} + B_{cl} w \\ z = C_{cl} x_{cl} + D_{cl} w \end{cases} \quad (8)$$

其中 $x_{cl} = [x^T, x_c^T]^T$, $A_{cl} = \begin{bmatrix} A + \Delta A & B_2 C_c \\ B_c E & A_c \end{bmatrix}$, B_{cl}

$$= \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix}, C_{cl} = [C + \Delta C \quad 0], D_{cl} = D =$$

$$\begin{bmatrix} D_1 & 0 \\ 0 & D_2 \end{bmatrix}.$$

下面给出连续线性时不变系统中与 H_∞ 分析有关的基本引理: 有界实引理。这将在后面的分析证明过程中用到。

引理 1^[13] 以下三个条件是等价的:

(1) 系统渐进稳定, 且从扰动输入 $w = [w_1^T, w_2^T]^T$ 到控制输出 $z = [z_1^T, z_2^T]^T$ 的传递函数的 H_∞ 范数小于给定的常数 γ , 即

$$\|D_{cl} + C_{cl}(sI - A_{cl})^{-1}B_{cl}\|_\infty < \gamma \quad (9)$$

(2) 存在一个正定矩阵 P 满足

$$\begin{bmatrix} A_{cl}^T P + P A_{cl} & P B_{cl} & C_{cl}^T \\ B_{cl}^T P & -\gamma^2 I & D_{cl}^T \\ C_{cl} & D_{cl} & -\gamma^2 I \end{bmatrix} < 0 \quad (10)$$

(3) 存在一个正定矩阵 P 满足

$$\begin{bmatrix} A_{cl}^T P + P A_{cl} + C_{cl}^T C_{cl} & P B_{cl} + C_{cl}^T D_{cl} \\ B_{cl}^T P + D_{cl}^T C_{cl} & -\gamma^2 I + D_{cl}^T D_{cl} \end{bmatrix} < 0 \quad (11)$$

则称系统(式(8))具有 H_∞ 性能 γ 。

不等式(9)反映了系统对外部扰动的抑制能力, 因此 γ 也称为系统对外部扰动的抑制度或抑制水平。 γ 越小, 表明系统的性能越好。

下面给出时变量化器的一般定义。令 $z \in R^l$ 为被量化变量。量化器被设计成分段常数函数 $q: R^l \rightarrow \Omega$, 其中, Ω 是 R^l 中的一个有限子集。这样, 使得 R^l 分割出来有限量化区域 $\{z \in R^l: q(z) = i,$

$i \in \Omega\}$ 。假设这些量化区域不包括任何特殊形式。假设存在正实数 M 和 Δ 使得下列条件满足

$$(1) \text{ 当 } |z| \leq M \text{ 时,} \\ |q(z) - z| \leq \Delta \quad (12)$$

$$(2) \text{ 当 } |z| > M \text{ 时,} \\ |q(z)| > M - \Delta \quad (13)$$

其中 M 和 Δ 分别是函数 q 和量化误差的取值范围。式(12)给出了量化器未达到饱和时量化误差的边界,式(13)给出了一种检测饱和度可能性的方法。同样,假设当 x 在原点邻域时, $q(x) = 0$ 。

采用如下的量化测量形式:

$$q_\mu(z) = \mu q\left(\frac{z}{\mu}\right) \quad (14)$$

其中, $\mu > 0$ 是参数。当 $\mu = 0$ 时,被看做是量化器输出为 0 的集合。 $M\mu$ 是量化器的范围, $\Delta\mu$ 是量化误差。 μ 是一个缩放变量,增加 μ 或者减少 μ 将得到不同范围和量化误差的量化值。当 μ 为固定值时,式(14)是时不变的。通过调节缩放变量 μ ,可以使所设计的量化控制能保证系统收敛到平衡点。

采用动态输出反馈量化控制器:

$$\begin{cases} \dot{x}_{ci} = A_{ci} q_{\mu_{1i}}(x_{ci}) + B_{ci} q_{\mu_{2i}}(y_i) \\ = \mu_{1i} A_{ci} q_{1i}\left(\frac{x_{ci}}{\mu_{1i}}\right) + \mu_{2i} B_{ci} q_{2i}\left(\frac{y_i}{\mu_{2i}}\right) \\ u_i = q_{\mu_{3i}}(C_{ci} q_{\mu_{1i}}(x_{ci})) \\ = \mu_{3i} q_{3i}\left(\frac{\mu_{1i} C_{ci} q_{1i}\left(\frac{x_{ci}}{\mu_{1i}}\right)}{\mu_{3i}}\right), i = 1, 2 \end{cases} \quad (15)$$

其中 $q_{\mu_{1i}}, q_{\mu_{2i}}, q_{\mu_{3i}}$ 是根据式(14)定义的时变量化器, q_{1i}, q_{2i} 和 q_{3i} 是由式(12)、式(13)定义的量化函数。因此, q_{1i} 对控制器的状态进行量化且量化范围为 M_{1i} , 量化误差为 Δ_{1i} , q_{2i} 对测量输出进行量化且量化范围为 M_{2i} , 量化误差为 Δ_{2i} , q_{3i} 对控制输入进行量化且量化范围为 M_{3i} , 量化误差为 Δ_{3i} 。上述量化控制器满足如下条件:

$$\mu_{3i} = \theta \mu_{1i}, M_{3i} = \frac{\|C_{ci}\| \mu_{1i}}{\mu_{3i}} (\Delta_{1i} + M_{1i}) \quad (16)$$

其中 θ 是正实数且根据实际情况调整。针对系统(式(5)),采用量化动态输出反馈控制器(式(16))进行控制,可得量化后的闭环子系统

$$\begin{cases} \dot{x}_{cli} = A_{cli} x_{cli} + B_{cli} w_i + \bar{B}_{2i} \bar{e}_i \\ z_i = C_{cli} x_{cli} + D_{cli} w_i \end{cases} \quad (17)$$

$$\text{其中: } \bar{B}_{2i} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & B_{2i} \\ A_{ci} & B_{ci} & 0 \end{bmatrix}, \bar{e}_i = \begin{bmatrix} \mu_{1i} e_{1i} \\ \mu_{2i} e_{2i} \\ \mu_{3i} e_{3i} \end{bmatrix}, e_{1i} =$$

$$q_{1i}\left(\frac{x_{ci}}{\mu_{1i}}\right) - \frac{x_{ci}}{\mu_{1i}}, e_{2i} = q_{2i}\left(\frac{y_i}{\mu_{2i}}\right) - \frac{y_i}{\mu_{2i}}, e_{3i} = q_{3i}\left(\frac{\mu_{1i} C_{ci} q_{1i}\left(\frac{x_{ci}}{\mu_{1i}}\right)}{\mu_{3i}}\right) - \frac{C_{ci} x_{ci}}{\mu_{3i}}.$$

将整个大系统的闭环传递函数写为

$$\begin{cases} \dot{x}_{cl} = A_{cl} x_{cl} + B_{cl} w + \bar{B}_2 \bar{e} \\ z = C_{cl} x_{cl} + D_{cl} w \end{cases} \quad (18)$$

其中, A_{cl}, B_{cl}, C_{cl} 和 D_{cl} 由式(8)定义, $\bar{B}_2 = \text{diag}\{\bar{B}_{21}, \bar{B}_{22}\}$, $\bar{e} = \text{diag}\{e_1, e_2\}$ 。

本文先分析未加入量化器时闭环系统式(8)的稳定性及 H_∞ 性能,再考虑加入量化器后,由于存在量化误差,闭环系统稳定性和 H_∞ 性能不能得到保证。因此,本文研究的量化控制问题描述如下:

分散 H_∞ 量化动态输出反馈控制问题 设计分散量化动态输出反馈控制器(式(16)),根据局部信息 $x_{ci}, y_i (i = 1, 2)$ 来调整动态参数 μ_{1i}, μ_{2i} 和 μ_{3i} ,从而使得整个量化后的闭环系统(式(18))渐进稳定并获得 H_∞ 扰动抑制水平 γ 。

2 分散量化动态输出反馈 H_∞ 控制器的设计

2.1 未考虑量化系统的动态输出反馈 H_∞ 控制器设计

针对不确定关联网络系统(式(5)),本节给出不考虑量化器的分散动态输出反馈控制器(式(8))的设计方法,使得闭环系统(式(8))渐进稳定且具有 H_∞ 扰动抑制水平 γ 。

引理 2^[13] 假设 E, G 和 Δ 是具有合适维数的矩阵,且 $\Delta^T \Delta \leq I$ 。因此,对于任意的 $\varepsilon > 0$, 不等式

$$E \Delta G + G^T \Delta^T E^T \leq \varepsilon E E^T + \varepsilon^{-1} G^T G \quad (19)$$

成立。

下面给出了使闭环系统(式(8))渐进稳定并具有 H_∞ 扰动抑制水平 γ 的分散控制器存在的充分条件。

引理 3^[13] 对于系统(式(5)),给定常数 $\gamma > 0$, 若存在正数 $\varepsilon_1 > 0, \varepsilon_2 > 0$ 及块对角正定矩阵 $\bar{X}, \bar{Y}$ 和块对角矩阵 $\bar{F}, \bar{L}, \bar{Q}$ (每一个子块的维数与相应子系统的维数相匹配)满足

$$\tilde{T}(\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{F}, \tilde{L}, \tilde{Q}, \varepsilon_1, \varepsilon_2) =$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{J}_{11} & \tilde{J}_{21}^T & B_1 & \tilde{X}C^T \\ \tilde{J}_{21} & \tilde{J}_{22} & \tilde{Y}B_1 & C^T \\ B_1^T & B_1^T \tilde{Y} & -\gamma I & D^T \\ C\tilde{X} & C & D & \tilde{J}_{44} \end{bmatrix} < 0 \quad (20)$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{X} & I \\ I & \tilde{Y} \end{bmatrix} > 0 \quad (21)$$

其中

$$\begin{aligned} \tilde{J}_{11} &= A\tilde{X} + \tilde{X}A^T + B_2\tilde{F} + \tilde{F}^T B_2^T + \varepsilon_1 K K^T \\ &\quad + \varepsilon_1^{-1} \tilde{X} H^T H \tilde{X} + \varepsilon_2^{-1} \tilde{X} S^T S \tilde{X} \\ \tilde{J}_{21} &= A^T + \tilde{Y} A \tilde{X} + \tilde{L} E \tilde{X} + \tilde{Y} B_2 \tilde{F} + \tilde{Q} + \varepsilon_1 \tilde{Y} K K^T \\ &\quad + \varepsilon_1^{-1} H^T H \tilde{X} + \varepsilon_2^{-1} S^T S \tilde{X} \\ \tilde{J}_{22} &= \tilde{Y} A + A^T \tilde{Y} + \tilde{L} E + E^T \tilde{L}^T + \varepsilon_1 \tilde{Y} K K^T \tilde{Y} \\ &\quad + \varepsilon_1^{-1} H^T H + \varepsilon_2^{-1} S^T S \\ \tilde{J}_{44} &= -\gamma I + \varepsilon_2 G G^T \end{aligned} \quad (22)$$

则存在分散动态输出反馈控制器(式(8)),使构成的闭环大系统(式(8))渐进稳定且具有给定的 H_∞ 性能指标 γ 。在此情形下,控制器的参数可取为

$$A_c = \tilde{V}^{-1} \tilde{Q} \tilde{U}^{-T}, B_c = \tilde{V}^{-1} \tilde{L}, C_c = \tilde{F} \tilde{U}^{-T} \quad (23)$$

且 $\tilde{U}, \tilde{V}$ 是块对角矩阵并满足

$$\tilde{U} \tilde{V}^T = I - \tilde{X} \tilde{Y} \quad (24)$$

证明:采用与文献[13]类似的方法可得,如果

$$\begin{bmatrix} A_{cl}^T P + P A_{cl} & P B_{cl} & C_{cl}^T \\ B_{cl}^T P & -\gamma I & D_{cl}^T \\ C_{cl} & D_{cl} & -\gamma I \end{bmatrix} < 0 \quad (25)$$

成立,那么闭环系统(式(8))渐进稳定并获得 H_∞ 扰动抑制水平 γ 。而由 Schur 补引理,不等式(25)等价于式(20)。证毕。式(25)中 $P = \text{diag}\{P_1, P_2\}$, 且

$$P_i = \begin{bmatrix} Y_i & V_i \\ V_i^T & U_i^{-1} X_i Y_i X_i U_i^{-T} - U_i^{-1} X_i U_i^{-T} \end{bmatrix} \quad i = 1, 2 \quad (26)$$

由于式(20)为非线性矩阵不等式,本节通过选取适当的同伦函数来表示该非线性矩阵不等式,利用 Schur 补引理将式(20)化为两个双线性矩阵不等式,迭代求解式(20)。

引入实数 $\lambda \in [0, 1]$ 并定义矩阵

$$\tilde{H}(\tilde{X}, \tilde{F}, \tilde{Y}, \tilde{L}, \tilde{Q}, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \lambda) =$$

$$\tilde{T}_1(\tilde{X}, \tilde{F}, \tilde{Y}, \tilde{L}, \tilde{Q}) + \lambda \tilde{T}_2(\tilde{X}, \tilde{F}, \tilde{Y}, \tilde{L}, \tilde{Q}, \varepsilon_1, \varepsilon_2) \quad (27)$$

式中

$$\tilde{T}_1(\tilde{X}, \tilde{F}, \tilde{Y}, \tilde{L}, \tilde{Q}) = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{21}^T & B_1 & \tilde{X}C^T \\ J_{21} & J_{22} & \tilde{Y}B_1 & C^T \\ B_1^T & B_1^T \tilde{Y} & -\gamma I & D^T \\ C\tilde{X} & C & D & J_{44} \end{bmatrix} \quad (28)$$

其中

$$\begin{aligned} J_{11} &= A\tilde{X} + \tilde{X}A^T + B_2\tilde{F} + \tilde{F}^T B_2^T \\ J_{21} &= A^T + \tilde{Y} A \tilde{X} + \tilde{L} E \tilde{X} + \tilde{Y} B_2 \tilde{F} + \tilde{Q} \\ J_{22} &= \tilde{Y} A + A^T \tilde{Y} + \tilde{L} E + E^T \tilde{L}^T \\ J_{44} &= -\gamma I \end{aligned} \quad (29)$$

$$\tilde{T}_2(\tilde{X}, \tilde{F}, \tilde{Y}, \tilde{L}, \tilde{Q}, \varepsilon_1, \varepsilon_2) = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{21}^T & 0 & 0 \\ Z_{21} & Z_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Z_{44} \end{bmatrix} \quad (30)$$

其中

$$\begin{aligned} Z_{11} &= \varepsilon_1 K K^T + \varepsilon_1^{-1} \tilde{X} H^T H \tilde{X} + \varepsilon_2^{-1} \tilde{X} S^T S \tilde{X} \\ Z_{21} &= \varepsilon_1 \tilde{Y} K K^T + \varepsilon_1^{-1} H^T H \tilde{X} + \varepsilon_2^{-1} S^T S \tilde{X} \\ Z_{22} &= \varepsilon_1 \tilde{Y} K K^T \tilde{Y} + \varepsilon_1^{-1} H^T H + \varepsilon_2^{-1} S^T S \\ Z_{44} &= \varepsilon_2 G G^T \end{aligned} \quad (31)$$

当 λ 从 0 变到 1 时,通过求解

$$\tilde{H}(\tilde{X}, \tilde{F}, \tilde{Y}, \tilde{L}, \tilde{Q}, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \lambda) < 0 \quad (32)$$

就可得到(20)式的解。

为求解问题式(32),应用 Schur 补引理和引理 2,可得到与式(32)等价的以下两个矩阵不等式:

$$\tilde{H}_1(\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{F}, \tilde{L}, \tilde{Q}, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \lambda) =$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{J}_{11} & \tilde{J}_{21}^T & B_1 & \tilde{X}C_1^T & \tilde{X}H^T & \tilde{X}S^T \\ \tilde{J}_{21} & \tilde{J}_{22} & \tilde{Y}B_1 & C_1^T & H^T & S^T \\ B_1^T & B_1^T \tilde{Y} & -\gamma I & D^T & 0 & 0 \\ C_1 \tilde{X} & C_1 & D & \tilde{J}_{44} & 0 & 0 \\ H \tilde{X} & H & 0 & 0 & -\varepsilon_1 \lambda^{-1} I & 0 \\ S \tilde{X} & S & 0 & 0 & 0 & -\varepsilon_2 \lambda^{-1} I \end{bmatrix} < 0 \quad (33)$$

其中

$$\begin{aligned}
\tilde{J}_{11} &= A\tilde{X} + \tilde{X}A^T + B_2\tilde{F} + \tilde{F}^T B_2^T + \varepsilon_1 \lambda K K^T \\
\tilde{J}_{21} &= A^T + \tilde{Y}A\tilde{X} + \tilde{L}C_2\tilde{X} + \tilde{Y}B_2\tilde{F} + \tilde{Q} + \varepsilon_1 \lambda \tilde{Y}K K^T \\
\tilde{J}_{22} &= \tilde{Y}A + A^T\tilde{Y} + \tilde{L}C_2 + C_2^T\tilde{L}^T + \varepsilon_1 \lambda \tilde{Y}K K^T\tilde{Y} \\
\tilde{J}_{44} &= -\gamma I + \varepsilon_2 \lambda G G^T
\end{aligned} \quad (34)$$

$$\begin{aligned}
\tilde{H}_2(\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{F}, \tilde{L}, \tilde{Q}, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \lambda) = \\
\begin{bmatrix}
\tilde{J}_{11} & \tilde{J}_{21}^T & B_1 & \tilde{X}C_1^T & K & 0 \\
\tilde{J}_{21} & \tilde{J}_{22} & \tilde{Y}B_1 & C_1^T & \tilde{Y}K & 0 \\
B_1^T & B_1^T\tilde{Y} & -\gamma I & D^T & 0 & 0 \\
C_1\tilde{X} & C_1 & D & \tilde{J}_{44} & 0 & G \\
K^T & K^T\tilde{Y} & 0 & 0 & -\varepsilon_1^{-1}\lambda^{-1}I & 0 \\
0 & 0 & 0 & G^T & 0 & -\varepsilon_2^{-1}\lambda^{-1}I
\end{bmatrix} \\
< 0 \quad (35)
\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}
\tilde{J}_{11} &= A\tilde{X} + \tilde{X}A^T + B_2\tilde{F} + \tilde{F}^T B_2^T + \varepsilon_1^{-1}\lambda\tilde{X}H^T H\tilde{X} \\
&\quad + \varepsilon_2^{-1}\lambda\tilde{X}S^T S\tilde{X} \\
\tilde{J}_{21} &= A^T + \tilde{Y}A\tilde{X} + \tilde{L}C_2\tilde{X} + \tilde{Y}B_2\tilde{F} + \tilde{Q} \\
&\quad + \varepsilon_1^{-1}\lambda H^T H\tilde{X} + \varepsilon_2^{-1}\lambda S^T S\tilde{X} \\
\tilde{J}_{22} &= \tilde{Y}A + A^T\tilde{Y} + \tilde{L}C_2 + C_2^T\tilde{L}^T + \varepsilon_1^{-1}\lambda H^T H \\
&\quad + \varepsilon_2^{-1}\lambda S^T S \\
\tilde{J}_{44} &= -\gamma I
\end{aligned} \quad (36)$$

运用文献[13]的迭代求解算法可得控制器(式(8))的参数 A_c, B_c, C_c 的值。

系统中加入量化器后,量化误差会影响系统的稳定性,因此有必要研究如何设计根据控制器状态 x_{ci} 和系统测量输出 $y_i (i = 1, 2)$ 来调节动态参数 μ_1, μ_2 和 μ_3 的分散控制方法,使量化后闭环系统(式(18))全局稳定并获得 H_∞ 扰动抑制水平 γ 。

2.2 量化动态输出反馈 H_∞ 控制器的设计

根据引理1,不等式(25)与式(12)等价。既然式(12)是矩阵不等式,同样可以找到正定块对角矩阵 $R = \text{diag}\{R_1, R_2\}$, 满足

$$\begin{bmatrix}
A_{cl}^T P + P A_{cl} + C_{cl}^T C_{cl} + R & P B_{cl} + C_{cl}^T D_{cl} \\
B_{cl}^T P + D_{cl}^T C_{cl} & -\gamma^2 I + D_{cl}^T D_{cl}
\end{bmatrix} < 0 \quad (37)$$

下面给出本文的一个重要结论。

定理 1 对于量化后的不确定关联网络系统(式(18)),假设对于量化误差 Δ_i , 选择足够大的量化器参数 M_{1i} 和 M_{2i} 满足

$$M_{1i} > \Delta_i \frac{\|P_i \bar{B}_{2i}\|}{\lambda_m(R_i)}, \quad M_{2i} > \Delta_{2i} \frac{\|P_i \bar{B}_{2i}\| \|E_i\|}{\lambda_m(R_i)} \quad i = 1, 2 \quad (38)$$

其中 $\Delta_i^2 = \Delta_{1i}^2 + (\theta \Delta_{3i} + \|C_{ci}\| \Delta_{1i})^2$ 。那么,存在着一种依赖局部状态变量 x_{ci} 和输出变量 y_i 来调节

$$\mu_{1i} = \frac{2 \|x_{ci}\|}{M_{1i} + \Delta_i \frac{\|P_i \bar{B}_{2i}\|}{\lambda_m(R_i)}}, \quad \mu_{3i} = \theta \mu_{1i}, \quad i = 1, 2 \quad (39)$$

以及

$$\mu_{2i} = \frac{2 \|y_i\|}{M_{2i} + \Delta_{2i} \frac{\|P_i \bar{B}_{2i}\| \|E_i\|}{\lambda_m(R_i)}}, \quad i = 1, 2 \quad (40)$$

的控制方法,使得闭环系统(式(18))渐进稳定并且满足 H_∞ 扰动抑制水平 γ 。

证明:当 $\|y_i\| \leq \mu_{2i} M_{2i}$ 时,易得

$$\|e_{2i}\| = \left\| q_{2i} \left(\frac{y_i}{\mu_{2i}} \right) - \frac{y_i}{\mu_{2i}} \right\| \leq \Delta_{2i} \quad (41)$$

当 $\|x_{ci}\| \leq \mu_{1i} M_{1i}$ 时,易得

$$\begin{aligned}
\left| q_{1i} \left(\frac{x_{ci}}{\mu_{1i}} \right) - \frac{x_{ci}}{\mu_{1i}} \right| &\leq \|e_{1i}\| = \left| q_{1i} \left(\frac{x_{ci}}{\mu_{1i}} \right) - \frac{x_{ci}}{\mu_{1i}} \right| \leq \Delta_{1i} \\
\Rightarrow \left| q_{1i} \left(\frac{x_{ci}}{\mu_{1i}} \right) \right| &\leq \left| \frac{x_{ci}}{\mu_{1i}} \right| + \Delta_{1i} \leq M_{1i} + \Delta_{1i} \quad (42)
\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}
\left| \frac{C_{ci} \mu_{1i} q_{1i} \left(\frac{x_{ci}}{\mu_{1i}} \right)}{\mu_{3i}} \right| &\leq \frac{\|C_{ci}\| \mu_{1i}}{\mu_{3i}} \left| q_{1i} \left(\frac{x_{ci}}{\mu_{1i}} \right) \right| \\
&\leq \frac{\|C_{ci}\| \mu_{1i}}{\mu_{3i}} (\Delta_{1i} + M_{1i}) = M_{3i} \quad (43)
\end{aligned}$$

同理,当 $\|x_{ci}\| \leq \mu_{1i} M_{1i}$ 时,有

$$\begin{aligned}
\|e_{3i}\| &= \left\| q_{3i} \left(\frac{C_{ci} \mu_{1i} q_{1i} \left(\frac{x_{ci}}{\mu_{1i}} \right)}{\mu_{3i}} \right) - \frac{C_{ci} x_{ci}}{\mu_{3i}} \right\| \\
&= \left\| q_{3i} \left(\frac{C_{ci} \mu_{1i} q_{1i} \left(\frac{x_{ci}}{\mu_{1i}} \right)}{\mu_{3i}} \right) - \frac{C_{ci} \mu_{1i} q_{1i} \left(\frac{x_{ci}}{\mu_{1i}} \right)}{\mu_{3i}} \right. \\
&\quad \left. + \frac{C_{ci} \mu_{1i} q_{1i} \left(\frac{x_{ci}}{\mu_{1i}} \right)}{\mu_{3i}} - \frac{C_{ci} x_{ci}}{\mu_{3i}} \right\| \\
&\leq \Delta_{3i} + \frac{\|C_{ci}\| \mu_{1i}}{\mu_{3i}} \left| q_{1i} \left(\frac{x_{ci}}{\mu_{1i}} \right) - \frac{x_{ci}}{\mu_{1i}} \right| \\
&\leq \Delta_{3i} + \frac{\|C_{ci}\|}{\theta} \Delta_{1i} \quad (44)
\end{aligned}$$

因此可得

$$\begin{aligned} \|\bar{e}_i\| &= \sqrt{\mu_{1i}^2 \|\mathbf{e}_{1i}\|^2 + \mu_{2i}^2 \|\mathbf{e}_{2i}\|^2 + \mu_{3i}^2 \|\mathbf{e}_{3i}\|^2} \\ &\leq \sqrt{\mu_{1i}^2 \Delta_{1i}^2 + \mu_{2i}^2 \Delta_{2i}^2 + \mu_{3i}^2 (\theta \Delta_{3i} + \|\mathbf{C}_{\alpha}\| \Delta_{1i})^2} \\ &= \sqrt{\mu_{1i}^2 \Delta_{1i}^2 + \mu_{2i}^2 \Delta_{2i}^2} \end{aligned} \quad (45)$$

其中 $\Delta_i^2 = \Delta_{1i}^2 + (\theta \Delta_{3i} + \|\mathbf{C}_{\alpha}\| \Delta_{1i})^2$ 。

对于闭环控制系统(式(18)),选择 Lyapunov 函数

$$V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}_{cl}^T \mathbf{P} \mathbf{x}_{cl} \quad (46)$$

其中 $\mathbf{P}$ 满足不等式(25)。根据矩阵不等式(37)和等式(39)、(40),沿着系统(式(18))对式(46)求一阶导数,可得

$$\begin{aligned} \dot{V} &= (\mathbf{A}_{cl} \mathbf{x}_{cl} + \mathbf{B}_{cl} \mathbf{w} + \bar{\mathbf{B}}_2 \bar{\mathbf{e}})^T \mathbf{P} \mathbf{x}_{cl} \\ &\quad + \mathbf{x}_{cl}^T \mathbf{P} (\mathbf{A}_{cl} \mathbf{x}_{cl} + \mathbf{B}_{cl} \mathbf{w} + \bar{\mathbf{B}}_2 \bar{\mathbf{e}}) \\ &= \mathbf{x}_{cl}^T \mathbf{A}_{cl}^T \mathbf{P} \mathbf{x}_{cl} + \mathbf{w}^T \mathbf{B}_{cl}^T \mathbf{P} \mathbf{x}_{cl} + \bar{\mathbf{e}}^T \bar{\mathbf{B}}_2^T \mathbf{P} \mathbf{x}_{cl} \\ &\quad + \mathbf{x}_{cl}^T \mathbf{P} \mathbf{A}_{cl} \mathbf{x}_{cl} + \mathbf{x}_{cl}^T \mathbf{P} \mathbf{B}_{cl} \mathbf{w} + \mathbf{x}_{cl}^T \mathbf{P} \bar{\mathbf{B}}_2 \bar{\mathbf{e}} \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{cl} \\ \mathbf{w} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{cl}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A}_{cl} & \mathbf{P} \mathbf{B}_{cl} \\ \mathbf{B}_{cl}^T \mathbf{P} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{cl} \\ \mathbf{w} \end{bmatrix} \\ &\quad + \mathbf{x}_{cl}^T \mathbf{P} \bar{\mathbf{B}}_2 \bar{\mathbf{e}} + \bar{\mathbf{e}}^T \bar{\mathbf{B}}_2^T \mathbf{P} \mathbf{x}_{cl} \\ &\leq \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{cl} \\ \mathbf{w} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} -\mathbf{R} - \mathbf{C}_{cl}^T \mathbf{C}_{cl} & -\mathbf{C}_{cl}^T \mathbf{D}_{cl} \\ -\mathbf{D}_{cl}^T \mathbf{C}_{cl} & \gamma^2 \mathbf{I} - \mathbf{D}_{cl}^T \mathbf{D}_{cl} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{cl} \\ \mathbf{w} \end{bmatrix} \\ &\quad + \mathbf{x}_{cl}^T \mathbf{P} \bar{\mathbf{B}}_2 \bar{\mathbf{e}} + \bar{\mathbf{e}}^T \bar{\mathbf{B}}_2^T \mathbf{P} \mathbf{x}_{cl} \\ &= -\mathbf{z}^T \mathbf{z} + \gamma^2 \mathbf{w}^T \mathbf{w} - \mathbf{x}_{cl}^T \mathbf{R} \mathbf{x}_{cl} + \mathbf{x}_{cl}^T \mathbf{P} \bar{\mathbf{B}}_2 \bar{\mathbf{e}} + \bar{\mathbf{e}}^T \bar{\mathbf{B}}_2^T \mathbf{P} \mathbf{x}_{cl} \\ &\leq -\mathbf{z}^T \mathbf{z} + \gamma^2 \mathbf{w}^T \mathbf{w} - \lambda_m(\mathbf{R}) \|\mathbf{x}_{cl}\|^2 \\ &\quad + 2 \|\mathbf{x}_{cl}\| \|\mathbf{P} \bar{\mathbf{B}}_2\| \|\bar{\mathbf{e}}\| \\ &\leq -\mathbf{z}^T \mathbf{z} + \gamma^2 \mathbf{w}^T \mathbf{w} - \lambda_m(\mathbf{R}_1) (\|\mathbf{x}_{cl}\| \\ &\quad - \frac{\|\mathbf{P}_1 \bar{\mathbf{B}}_{21}\| \|\bar{\mathbf{e}}_1\|}{\lambda_m(\mathbf{R}_1)})^2 - \lambda_m(\mathbf{R}_2) (\|\mathbf{x}_{cl}\| \\ &\quad - \frac{\|\mathbf{P}_2 \bar{\mathbf{B}}_{22}\| \|\bar{\mathbf{e}}_2\|}{\lambda_m(\mathbf{R}_2)})^2 \\ &\leq -\mathbf{z}^T \mathbf{z} + \gamma^2 \mathbf{w}^T \mathbf{w} - \varepsilon \lambda_m(\mathbf{R}) (\sqrt{\frac{\|\mathbf{y}_1\|^2}{\|\mathbf{E}_1\|^2} + \|\mathbf{x}_{cl}\|^2} \\ &\quad - \frac{\|\mathbf{P}_1 \bar{\mathbf{B}}_{21}\| \|\bar{\mathbf{e}}_1\|}{\lambda_m(\mathbf{R}_1)}) \times (\sqrt{\frac{\|\mathbf{y}_2\|^2}{\|\mathbf{E}_2\|^2} + \|\mathbf{x}_{cl}\|^2} \\ &\quad - \frac{\|\mathbf{P}_2 \bar{\mathbf{B}}_{22}\| \|\bar{\mathbf{e}}_2\|}{\lambda_m(\mathbf{R}_2)}) \end{aligned} \quad (47)$$

如果式(38)成立,则可以找到标量 $\varepsilon \in (0,1)$ 满足

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{1i} &> \Delta_i \frac{\|\mathbf{P}_i \bar{\mathbf{B}}_{2i}\|}{\lambda_m(\mathbf{R}_i)(1-\varepsilon)} \\ \mathbf{M}_{2i} &> \Delta_{2i} \frac{\|\mathbf{P}_i \bar{\mathbf{B}}_{2i}\| \|\mathbf{E}_i\|}{\lambda_m(\mathbf{R}_i)(1-\varepsilon)}, \quad i = 1, 2 \end{aligned} \quad (48)$$

根据式(39),对任意非零状态 $\mathbf{x}_{ci}$, 总是存在正数 μ_{1i} 使下式成立:

$$\|\mathbf{x}_{ci}\| = \left(\mathbf{M}_{1i} + \Delta_i \frac{\|\mathbf{P}_i \bar{\mathbf{B}}_{2i}\|}{\lambda_m(\mathbf{R}_i)} \right) \frac{\mu_{1i}}{2}, \quad i = 1, 2 \quad (49)$$

同理,根据式(40),对任意非零输出 $\mathbf{y}_i$, 总是存在正数 μ_{2i} 使下式成立:

$$\|\mathbf{y}_i\| = \left(\mathbf{M}_{2i} + \Delta_{2i} \frac{\|\mathbf{P}_i \bar{\mathbf{B}}_{2i}\| \|\mathbf{E}_i\|}{\lambda_m(\mathbf{R}_i)} \right) \frac{\mu_{2i}}{2}, \quad i = 1, 2 \quad (50)$$

由式(48)和式(49)可得

$$\Delta_i \frac{\|\mathbf{P}_i \bar{\mathbf{B}}_{2i}\|}{\lambda_m(\mathbf{R}_i)(1-\varepsilon)} \mu_{1i} \leq \|\mathbf{x}_{ci}\| \leq \mathbf{M}_{1i} \mu_{1i} \quad (51)$$

由式(48)和式(50)可得

$$\Delta_{2i} \frac{\|\mathbf{P}_i \bar{\mathbf{B}}_{2i}\| \|\mathbf{E}_i\|}{\lambda_m(\mathbf{R}_i)(1-\varepsilon)} \mu_{2i} \leq \|\mathbf{y}_i\| \leq \mathbf{M}_{2i} \mu_{2i} \quad (52)$$

这在 $\mathbf{x}_{ci} = 0, \mathbf{y}_i = 0$ 且 $\mu_{1i} = \mu_{2i} = 0$ 的情况下同样适用,此时认为量化器 q_1 和 q_2 的输出为零。这样,就可以选择 μ_{1i} 和 μ_{2i} , 分别满足式(39)和式(40),则式(51)和式(52)成立。因此,由式(47),可得

$$\begin{aligned} \dot{V} &\leq -\mathbf{z}^T \mathbf{z} + \gamma^2 \mathbf{w}^T \mathbf{w} - \varepsilon^2 \lambda_m(\mathbf{R}) \|\mathbf{x}_{cl}\|^2 \\ &\leq -\mathbf{z}^T \mathbf{z} + \gamma^2 \mathbf{w}^T \mathbf{w} - \varepsilon^2 \frac{\lambda_m(\mathbf{R})}{\lambda_M(\mathbf{P})} V \end{aligned} \quad (53)$$

首先,令式(53)中 $\mathbf{w} = 0$, 易证系统渐进稳定。

然后,既然 $V(t) \geq 0$, 从式(53)中可以得到

$\dot{V} \leq -\mathbf{z}^T \mathbf{z} + \gamma^2 \mathbf{w}^T \mathbf{w}$, 因此对于任意的 $t > t_0$, 有

$$\begin{aligned} V(t) - V(t_0) &\leq \int_{t_0}^t [-\mathbf{z}^T(\tau) \mathbf{z}(\tau) \\ &\quad + \gamma^2 \mathbf{w}^T(\tau) \mathbf{w}(\tau)] d\tau \end{aligned} \quad (54)$$

再次利用 $V(t) \geq 0$, 有

$$\int_{t_0}^t \mathbf{z}^T(\tau) \mathbf{z}(\tau) d\tau \leq V(t_0) + \gamma^2 \int_{t_0}^t \mathbf{w}^T(\tau) \mathbf{w}(\tau) d\tau \quad (55)$$

这表明得到了 H_∞ 扰动抑制水平 γ , 证毕。

3 结 论

本文研究了不确定关联量化动态输出反馈控制系统的稳定性及 H_∞ 扰动抑制问题,提出了依赖于控制器状态和系统测量输出的量化控制策略,从而使整个闭环系统渐进稳定并达到和没有量化器一样的 H_∞ 扰动抑制水平。

参考文献

- [1] Elia N, Mitter S K. Stabilization of linear systems with limited information. *IEEE Transactions on Automatic*

- Control*, 2001, 46:1384-1400
- [2] Fu M, Xie L. The sector bound approach to quantized feedback control. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2005, 50:1698-1711
 - [3] Gao H, Chen T. A new approach to quantized feedback control systems. *Automatica*, 2008, 44:534-542
 - [4] Dong Y, James L, Wang Z D. Persistent disturbance rejection via state feedback for networked control systems. *Chaos Solitons & Fractals*, 2009, 40:382-391
 - [5] Tian E, Yue D, Chen P. Quantized output feedback control for networked control systems. *Information Science*, 2008, 178: 2734-2749
 - [6] Chen P, Tian Y C. Networked H_∞ control of linear systems with state quantization. *Information Sciences*, 2007, 177:5763-5774
 - [7] Brockett R W, Liberzon D. Quantized feedback stabilization of linear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2000, 45(7): 1279-1289
 - [8] Liberzon D. Hybrid feedback stabilization of systems with quantized signals. *Automatica*, 2003, 39:1543-1554
 - [9] Ishii H, Basar T. Remote control of LTI systems over networks with state quantization. *Systems & Control Letters*, 2005, 54(1): 15-31
 - [10] Li K Y. Robust and Efficient Feedback Coding for Communication Based Control: Operating Under Data-rate Constraints :[Ph. D. dissertation]. Boston : Boston University, 2006
 - [11] Che W W, Yang G H. Quantized dynamic output feedback H_∞ control for discrete-time systems with quantizer ranges consideration. *Acta Automatica Sinica*, 2008, 34: 652-658
 - [12] Chen N, Zhai G, Gui W, et al. Decentralized H_∞ quantizers design for uncertain interconnected networked systems. *IET Control Theory Appl*, 2010, 4: 177-185
 - [13] Chen N, Ikeda M, Gui W H. Design of robust H_∞ control for interconnected systems: a homotopy method. *International Journal of Control, Automation and Systems*, 2005, 3:143-151

Decentralized output feedback H-infinity control for uncertain interconnected systems with quantization

Chen Ning*, Shen Xiaoyu*, Gui Weihua*, Zhai Guisheng**

(* School of Information Science and Engineering, Central South University, Changsha 410083)

(** Department of Mathematical Sciences, Shibaura Institute of Technology, Saitama 337-8570, Japan)

Abstract

The design of dynamic output feedback controllers and quantizers was studied for uncertain interconnected H_∞ decentralized networked systems, and the systems' quantized control scheme relying on the controller state and the system output was proposed below. The output of each controller was quantized before it was input into the subsystem. Quantization errors between original signals and quantized signals caused by quantization effects may cause the system performance to deteriorate. For this purpose, under the assumption that a decentralized dynamic output feedback controller had been designed, the quantized control was dependent not only on the controller state but also on the system measurement output so that the quantized closed-loop system was asymptotically stable with the same H_∞ disturbance attenuation level as on no quantizers circumstance. Both the designed controllers and the quantizers' parameters were constructed in a decentralized manner, depending on local information.

Key words: interconnected networked system, dynamic output feedback, time-varying quantizer, decentralized control, H_∞ control