

分布参数的主观不确定性对结构平均输出性能方差影响的降维分析方法^①

张 强^② 吕震宙^③

(西北工业大学航空学院 西安 710072)

摘 要 为了有效控制结构平均输出性能,研究了分布参数主观不确定性对平均输出性能方差的影响。考虑到分布参数的主观不确定性对平均输出性能的方差贡献与分离主、客观不确定性后分布参数的主观不确定性对输出性能的方差贡献相同,并针对传统 Monte Carlo 方法效率低、计算量大的缺点,首先采用乘法降维方法求解基于平均性能方差的全局灵敏度,该方法对功能函数的调用次数远远小于传统的 Monte Carlo 方法;其次将主、客观分离方法与乘法降维方法相结合,求解分布参数的主观不确定性对平均输出性能方差的影响,该方法在保证精度的同时,进一步提高了计算效率。

关键词 主观不确定性,全局灵敏度,乘法降维方法

0 引 言

工程实际中,对模型平均输出性能的重要性分析常用于可靠性、风险决策等方面。通过对平均输出性能进行重要性分析,可以得到输入不确定性对平均输出性能影响程度的大小,从而可以对其进行排序。人们往往对那些导致平均输出性能变化较大的量感兴趣,并根据重要性排序结果对其进行有效的控制。输入不确定性经常包括主观不确定性(分布参数的不确定性)和客观不确定性(随机变量的不确定性)^[1-3]。客观随机变量的不确定性是一种固有的不确定性,除非物理性质发生改变,客观不确定性是不会减小的。但是主观分布参数的不确定性则可以随着认识的深入和数据的丰富而减少。客观随机变量的分布是由其主观分布参数决定的,要分析客观随机变量对结构系统输出性能的影响,就必须知道主观分布参数对结构系统影响的重要性大小,因为分布参数不仅是客观随机变量本质的特征属性,还是工程应用中实际可控的量,所以确定主观分布参数的不确定性对结构系统平均输出性能的影响是非常有意义的。结构输入变量分布参数的主观

不确定性将向结构平均输出性能传递,分析分布参数对平均输出性能方差的影响,可以达到有效控制平均输出性能的目的。

目前,针对随机变量的主、客观不确定性对结构系统的影响已经做了较多研究,其中基于方差的指标^[4-6]应用较为广泛。Sankararaman 和 Mahadevan^[7]通过引入一个与分布参数相互独立的辅助变量,将主观不确定性和客观不确定性完全分离,进而计算主、客观不确定性基于方差的全局灵敏度指标。与传统的 Monte Carlo 方法相比,文献[8]通过乘法降维方法,大大减小了计算基于方差的全局灵敏度指标的计算量。本文对乘法降维方法进行了拓展,将其应用于分析分布参数的主观不确定性对平均输出性能方差的影响。首先直接采用乘法降维方法来求解基于平均输出性能方差的全局灵敏度,然后利用分布参数的主观不确定性对平均输出性能的方差贡献与分离主、客观不确定性后分布参数主观不确定性对输出性能的方差贡献相同的原理,将分离方法与降维方法相结合,求解基于输出性能方差的全局灵敏度,进而分析主观不确定性对平均输出性能方差的影响,从而进一步提高主观不确定性对平均输出性能影响分析的计算效率。

① 国家自然科学基金(51308459)资助项目。
 ② 男,1990 年生,硕士生;研究方向:可靠性工程;E-mail: zhangqiang19824@163.com
 ③ 通讯作者,E-mail: zhenzhou@nwpu.edu.cn
 (收稿日期:2014-04-23)

1 分布参数主观不确定性对平均输出性能的方差贡献

1.1 分布参数主观不确定性对平均输出性能方差影响的全局灵敏度定义

1.1.1 分布参数的主贡献和总贡献指标

在主、客观不确定性共同影响下的响应功能函数为 $Y = g(\mathbf{X}, \boldsymbol{\theta})$, 其中 $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ 为独立输入变量, 其不确定性可以通过条件概率密度函数 $f_X(\mathbf{x} | \boldsymbol{\theta})$ [9] 来描述, $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_p)$ 为独立的不确定性分布参数。若分布参数 $\boldsymbol{\theta}$ 的不确定性采用随机模型即概率密度函数 $f_{\boldsymbol{\theta}}(\boldsymbol{\theta})$ 来描述, 则结构系统的平均输出性能可以表示为

$$E_X(Y) = \int_{R^n} g(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}) f_X(\mathbf{x} | \boldsymbol{\theta}) d\mathbf{x} = \xi(\boldsymbol{\theta}) \quad (1)$$

由于输入变量 $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ 的概率分布具有不确定性, 因此结构系统输出响应的期望也会存在不确定性, 并也可以表示为不确定分布参数 $\boldsymbol{\theta}$ 的函数, 即 $\xi(\boldsymbol{\theta})$ 。则 θ_i 对 $E_X(Y)$ 基于方差的主重要性测度指标 S_i^M 为

$$S_i^M = \frac{Var_{\theta_i}(E_{\theta_{-i}}(E_X(Y) | \theta_i))}{Var(E_X(Y))} \quad (2)$$

其中, $\boldsymbol{\theta}_{-i}$ 指的是除 θ_i 外所有的变量 $(\theta_1, \dots, \theta_{i-1}, \theta_{i+1}, \dots, \theta_p)$ 。

1.1.2 主、客观不确定性的分离及分离后主观不确定性的方差贡献

依据随机变量的累积分布函数相等, 可引入分布函数为 $F_Z(\cdot)$ 的辅助变量 z 将独立输入变量 $\mathbf{X}$ 中的主、客观不确定性分离开来, 记 $\mathbf{X}$ 的分布函数为 $F_X(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta})$, 则由 $F_Z(z) = F_X(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta})$ 可以得到 $\mathbf{x} = F_X^{-1}(F_Z(z), \boldsymbol{\theta})$, 将此关系式带入响应功能函数 $Y = g(\mathbf{X}, \boldsymbol{\theta})$ 中, 可以得到响应量与主观变量之间的直接关系如下:

$$Y = g(\mathbf{X}, \boldsymbol{\theta}) = g(F_X^{-1}(F_Z(z), \boldsymbol{\theta})) = \psi(z, \boldsymbol{\theta}) \quad (3)$$

根据积分变换原理, 可以证明主、客观不确定性分离后, θ_i 对 Y 的方差贡献 $Var_{\theta_i}(E_{(z, \theta_{-i})}(y | \theta_i))$ 与 θ_i 对 $E_X(Y)$ 的方差贡献 $Var_{\theta_i}(E_{\theta_{-i}}(E_X(Y) | \theta_i))$ 是相等的, 过程如下:

$$\begin{aligned} & E_{\theta_{-i}}(E_X(Y) | \theta_i) \\ &= \int_{R^{n-1}} \int_{R^n} g(\mathbf{x}) \cdot f_X(\mathbf{x} | \boldsymbol{\theta}) d\mathbf{x} f_{\theta_{-i}}(\boldsymbol{\theta}_{-i}) d\boldsymbol{\theta}_{-i} \\ &= \int_{R^{n-1}} \int_{R^n} g(F_X^{-1}(F_Z(z), \boldsymbol{\theta})) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \cdot f_Z(z) dz f_{\theta_{-i}}(\boldsymbol{\theta}_{-i}) d\boldsymbol{\theta}_{-i} \\ &= E_{(z, \theta_{-i})}(y | \theta_i) \end{aligned} \quad (4)$$

从而有

$$Var_{\theta_i}(E_{\theta_{-i}}(E_X(Y) | \theta_i)) = Var_{\theta_i}(E_{(z, \theta_{-i})}(y | \theta_i)) \quad (5)$$

由此可见, 分布参数的主观不确定性对平均输出性能的方差贡献与分离主、客观不确定性后分布参数的主观不确定性对输出性能的方差贡献相同。因此可通过计算分离主、客观不确定性后分布参数对输出性能的方差贡献, 来研究主观不确定性对平均输出性能的方差贡献。

1.2 分布参数对平均输出性能方差影响的降维分析方法

对于一般的响应功能函数, 求解分布参数对平均输出性能的方差贡献, 会遇到三重的多维积分问题。采用传统的 Monte Carlo 方法通常会用三层的循环抽样解决这一问题。第一层循环根据条件分布参数的概率密度函数对条件分布参数进行抽样, 第二层循环是对剩余的非条件分布参数进行抽样, 第三层循环在给定所有分布参数的情况下, 根据客观变量的条件概率密度函数进行抽样, 计算平均输出性能, 并最终对全局灵敏度进行定量计算。该方法的计算量随着变量维数的增加呈指数形式增长。对简单的模型来说, 传统 Monte Carlo 方法是可以接受的, 但对于复杂的模型来说, 通常计算量较大, 很难为工程所接受。

在文献[8]中, 应用乘法降维方法可将多维的响应功能函数 $y = h(\mathbf{X})$ 近似为多个一维函数的乘积(c_i 为对应于 x_i 的固定点, 其值可在 x_i 的取值范围内任意选取):

$$h(\mathbf{X}) \approx h_0^{1-n} \cdot \prod_{i=1}^n h(x_i, \mathbf{c}_{-i}) \quad (6)$$

从而将求解重要性测度时需要计算的多维积分转化为一维积分的乘积, 达到减少计算量的目的。其中, 分量函数 $h(x_i, \mathbf{c}_{-i}) = h(c_1, \dots, c_{i-1}, x_i, c_{i+1}, \dots, c_n)$, $h_0 = h(c_1, c_2, \dots, c_n)$ 。下面给出求解重要性测度的过程。

记分量函数 $h(x_i, \mathbf{c}_{-i})$ 的一阶和二阶原点矩分别为

$$\begin{aligned} \rho_k &= E_k[h(x_i, \mathbf{c}_{-i})] \\ &= \int_{x_k} h(c_1, \dots, c_{k-1}, x_k, c_{k+1}, \dots, c_n) f_k(x_k) dx_k \end{aligned} \quad (7)$$

和

$$\begin{aligned}\sigma_k &= E_k \{ [h(x_i, c_{-i})]^2 \} \\ &= \int_{x_k} [h(c_1, \dots, c_{k-1}, x_k, c_{k+1}, \dots, c_n)]^2 f_k(x_k) dx_k\end{aligned}\quad (8)$$

则在输入变量相互独立的情况下, $y = h(\mathbf{X})$ 的方差 V_y 可以由 ρ_k 和 σ_k 近似计算^[8]:

$$V_y = E[y] - E[y^2] \approx h_0^{2-2n} \cdot \left(\prod_{i=1}^n \sigma_k - \prod_{i=1}^n \rho_k^2 \right) \quad (9)$$

同样可以得到 $V_{x_i}[E_{x_{-i}}(y | x_i)]$ 的近似表达式如下:

$$V_{x_i}[E_{x_{-i}}(y | x_i)] \approx h_0^{2-2n} \cdot \prod_{i=1}^n \rho_k^2 (\sigma_i / \rho_i^2 - 1) \quad (10)$$

最终得到 x_i 的主测度^[8]:

$$S_i = \frac{V_{x_i}[E_{x_{-i}}(y | x_i)]}{V_y} \approx \frac{\sigma_i / \rho_i^2 - 1}{\left(\prod_{k=1}^n \sigma_k / \rho_k^2 \right) - 1} \quad (11)$$

本文对上述乘法降维方法进行了拓展,从两个方面将其应用于分析分布参数的主观不确定性对平均输出性能方差的影响。一个方面是直接采用乘法降维方法来求解主观分布参数的不确定性对平均输出性能方差的影响,另一个方面是先对主、客观不确定性进行分离,然后将输出响应性能写成辅助变量和主观分布参数的函数,利用此函数关系和降维方法求得主观分布参数对输出性能的方差贡献,从而利用 1.1.2 主、客观不确定性的分离及分离后主观不确定性的方差贡献相等的关系求得主观分布参数对平均输出性能的方差贡献。以下将给出这两个方面的详细过程。

1.2.1 求解主观不确定性对平均输出性能方差影响的降维方法

由式(2)可知,直接求解分布参数 θ_i 对平均输出性能的方差贡献需做三重积分,第一重是给定条件分布参数和非条件分布参数 θ_{-i} 下的关于 $\mathbf{X}$ 的 n 维积分,第二重是关于非条件分布参数 θ_{-i} 的 $p-1$ 维积分,第三重是关于条件分布参数 θ_i 的一维积分(若求解的是多个分布参数的联合影响,则第三重积分也是多维的)在做降维计算时,我们首先对 $\mathbf{X}$ 作降维,然后再对分布参数 $\boldsymbol{\theta}$ 作降维,以降低求解主观分布参数对平均输出性能方差贡献的计算量。

对于含有 n 维独立输入变量 $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ 的响应功能函数为 $Y = g(\mathbf{X})$, 对功能函数进行降维近似得到

$$Y = g(\mathbf{X}) \approx g_0^{1-n} \cdot \prod_{i=1}^n g(x_i, c_{-i}) \quad (12)$$

将(12)式对 $\mathbf{X}$ 进行 n 维积分得到结构系统的平均输出性能 $E_X(Y)$ 如下:

$$\begin{aligned}E_X(Y) &\approx E_X[g_0^{1-n} \cdot \prod_{i=1}^n g(x_i, c_{-i})] \\ &= g_0^{1-n} \cdot \prod_{i=1}^n \int_{x_i} g(x_i, c_{-i}) f_{x_i}(x_i | \theta_i) dx_i\end{aligned}\quad (13)$$

其中 θ_i 表示 x_i 的分布参数。

因为 c_i (如均值点) 可视为 θ_i 的函数,记 $c_i = u(\theta_i)$, 则

$$\begin{aligned}g_0 &= g(c_1, c_2, \dots, c_n) \\ &= g(u_1(\theta_1), u_1(\theta_1), \dots, u_n(\theta_n))\end{aligned}\quad (14)$$

对式(14)进行降维近似得到

$$\begin{aligned}g_0 &\approx [g(u_1(\theta_1^*), u_2(\theta_2^*), \dots, u_n(\theta_n^*))]^{1-n} \\ &\cdot \prod_{i=1}^n g(u_i(\theta_i), u_{-i}(\theta_{-i}^*))\end{aligned}\quad (15)$$

其中 θ_i^* 表示 θ_i 的特征点,可取为 θ_i 的均值, $u_{-i}(\theta_{-i}^*) = (u_1(\theta_1^*), \dots, u_{i-1}(\theta_{i-1}^*), u_{i+1}(\theta_{i+1}^*), \dots, u_n(\theta_n^*))$ 将式(15)带入式(13)得到

$$\begin{aligned}E_X(Y) &\approx \{ [g(u_1(\theta_1^*), u_2(\theta_2^*), \dots, u_n(\theta_n^*))]^{1-n} \\ &\cdot \prod_{i=1}^n g(u_i(\theta_i), u_{-i}(\theta_{-i}^*)) \}^{1-n} \\ &\cdot \prod_{i=1}^n \int_{x_i} g(x_i, u_{-i}(\theta_{-i}^*)) f_{x_i}(x_i | \theta_i) dx_i \\ &\approx [g(u_1(\theta_1^*), u_2(\theta_2^*), \dots, u_n(\theta_n^*))]^{(1-n)^2} \\ &\cdot \prod_{i=1}^n [g(u_i(\theta_i), u_{-i}(\theta_{-i}^*))^{1-n} \\ &\cdot \int_{x_i} g(x_i, u_{-i}(\theta_{-i}^*)) f_{x_i}(x_i | \theta_i) dx_i]\end{aligned}\quad (16)$$

记 $\varphi(\theta_i, \theta_{-i}^*) = g(u_i(\theta_i), u_{-i}(\theta_{-i}^*))^{1-n} \cdot \int_{x_i} g(x_i, u_{-i}(\theta_{-i}^*)) f_{x_i}(x_i | \theta_i) dx_i$, 则

$$\begin{aligned}E_X(Y) &\approx [g(u_1(\theta_1^*), u_2(\theta_2^*), \dots, u_n(\theta_n^*))]^{(1-n)^2} \\ &\cdot \prod_{i=1}^n \varphi(\theta_i, \theta_{-i}^*)\end{aligned}\quad (17)$$

式(17)得到了 $\boldsymbol{\theta}$ 与 $E_X(Y)$ 的函数关系,参照式(7)和式(8),记

$$\begin{aligned}p_k &= E_k[\varphi(\theta_k, \theta_{-k}^*)] \\ &= \int_{\theta_k} \varphi(\theta_1^*, \dots, \theta_{k-1}^*, \theta_k, \theta_{k+1}^*, \dots, \theta_n^*) f_k(\theta_k) d\theta_k\end{aligned}\quad (18)$$

$$q_k = E_k \{ [\varphi(\theta_k, \theta_{-k}^*)]^2 \}$$

$$= \int_{\theta_k} \varphi(\theta_1^*, \dots, \theta_{k-1}^*, \theta_k, \theta_{k+1}^*, \dots, \theta_n^*)^2 f_k(\theta_k) d\theta_k \cdot \prod_{i=1}^n \psi(z_i^*, z_{-i}^*, \theta_i, \theta_{-i}^*) \quad (23)$$

则可得分布参数主观变量 θ_i 对 $E_X(Y)$ 的主重要性测度 S_i^M 如下:

$$S_i^M \approx \frac{q_i/p_i^2 - 1}{(\prod_{k=1}^n q_k/p_k^2) - 1} \quad (20)$$

参照式(10),可以得到分布参数主观变量 θ_i 对 $E_X(Y)$ 的方差贡献为

$$\begin{aligned} \text{Var}_{\theta_i}(E_{\theta_{-i}}(E_X(Y) | \theta_i)) \\ \approx [g(u_1(\theta_1^*), u_2(\theta_2^*), \dots, u_n(\theta_n^*))]^{(1-n)^4} \\ \cdot (q_i/p_i^2 - 1) \cdot \prod_{i=1}^n p_k^2 \end{aligned} \quad (21)$$

在计算主观不确定性对平均输出性能基于方差的重要性测度时,用传统方法,如式(2)所示,需要进行 3 重高维积分,取主观变量和客观变量的抽样次数均为 M (通常大于 1000),求解 n 个分布参数主观变量对平均输出性能基于方差的重要性测度时,总的函数调用次数为 $(1+n) \cdot M \cdot M$ 。通过采用上述的乘法降维方法,只需要针对 n 个分布参数主观变量计算 $2n$ 个嵌套的一维积分,即对 p_k 和 q_k 的计算,而对于这两者的计算又可以采用两层高斯积分(附录 A)求解,取两层高斯积分的积分点个数都为 m (通常为 3),则求解 n 个分布参数主观变量对平均输出性能基于方差的重要性测度时,总的函数调用次数为 $n \cdot m \cdot (1+m)$ 。与传统方法相比大大减少了函数调用次数。

1.2.2 分离主、客观不确定性后,主观不确定性对输出性能方差影响的降维分析方法

由式(4)和式(5)可知,分离主、客观不确定性后,求解分布参数主观变量 θ_i 对 Y 方差贡献时仍需做二重积分。第一重是关于 $\mathbf{Z}$ 和非条件分布参数 θ_{-i} 的 $n+(p-1)$ 维积分,第二重是关于条件分布参数 θ_i 的一维积分。由于辅助变量 $\mathbf{Z}$ 已知,并且与分布参数 θ 相互独立,在此做乘法降维,我们可以将辅助变量 $\mathbf{Z}$ 和分布参数 θ 看做是具有同等地位的两组变量,如下所示:

$$Y = g(X) = g(F_X^{-1}(F_Z(z), \theta)) = \psi(z, \theta) \quad (22)$$

对上式进行降维近似可得

$$\begin{aligned} Y = g(\mathbf{X}) = \psi(z, \theta) \\ \approx \psi_0^{1-2n} \cdot \prod_{i=1}^n \psi(z_i, z_{-i}^*, \theta_i^*, \theta_{-i}^*) \end{aligned}$$

参照式(7)和式(8),记

$$\begin{aligned} p(\theta_k) \\ = \int_{\theta_k} \psi(z_i, z_{-i}^*, \theta_i^*, \theta_{-i}^*) \psi(z_i^*, z_{-i}^*, \theta_i, \theta_{-i}^*) f_k(\theta_k) d\theta_k \\ = \psi(z_i, z_{-i}^*, \theta_i^*, \theta_{-i}^*) \int_{\theta_k} \psi(z_i^*, z_{-i}^*, \theta_i, \theta_{-i}^*) f_k(\theta_k) d\theta_k \end{aligned} \quad (24)$$

$$\begin{aligned} q(\theta_k) \\ = \int_{\theta_k} \psi(z_i, z_{-i}^*, \theta_i^*, \theta_{-i}^*)^2 \psi(z_i^*, z_{-i}^*, \theta_i, \theta_{-i}^*)^2 f_k(\theta_k) d\theta_k \\ = \psi(z_i, z_{-i}^*, \theta_i^*, \theta_{-i}^*)^2 \int_{\theta_k} \psi(z_i^*, z_{-i}^*, \theta_i, \theta_{-i}^*)^2 f_k(\theta_k) d\theta_k \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} p(z_k) \\ = \int_{z_k} \psi(z_i, z_{-i}^*, \theta_i^*, \theta_{-i}^*) \psi(z_i^*, z_{-i}^*, \theta_i, \theta_{-i}^*) f_k(z_k) dz_k \\ = \psi(z_i^*, z_{-i}^*, \theta_i, \theta_{-i}^*) \int_{z_k} \psi(z_i, z_{-i}^*, \theta_i^*, \theta_{-i}^*) f_k(z_k) dz_k \end{aligned} \quad (26)$$

$$\begin{aligned} q(z_k) \\ = \int_{z_k} \psi(z_i, z_{-i}^*, \theta_i^*, \theta_{-i}^*)^2 \psi(z_i^*, z_{-i}^*, \theta_i, \theta_{-i}^*)^2 f_k(z_k) dz_k \\ = \psi(z_i^*, z_{-i}^*, \theta_i, \theta_{-i}^*)^2 \int_{z_k} \psi(z_i, z_{-i}^*, \theta_i^*, \theta_{-i}^*)^2 f_k(z_k) dz_k \end{aligned} \quad (27)$$

则可得变量 θ_i 和 z_i 对 Y 的主重要性测度分别为

$$S_{\theta_i}^M \approx \frac{q(\theta_i)/p(\theta_i)^2 - 1}{(\prod_{k=1}^n q(\theta_k)q(z_k)/p(\theta_k)^2 p(z_k)^2) - 1} \quad (28)$$

$$S_{z_i}^M \approx \frac{q(z_i)/p(z_i)^2 - 1}{(\prod_{k=1}^n q(\theta_k)q(z_k)/p(\theta_k)^2 p(z_k)^2) - 1} \quad (29)$$

参照式(10),可以得到分布参数主观变量 θ_i 对 Y 的方差贡献为

$$\begin{aligned} \text{Var}_{\theta_i}(E_{(z, \theta_{-i})}(Y | \theta_i)) \approx \psi_0^{2-4n} \cdot (q(\theta_i)/p(\theta_i)^2 - 1) \\ \cdot \prod_{i=1}^n p^2(\theta_k) \cdot \prod_{i=1}^n p^2(z_k) \end{aligned} \quad (30)$$

在计算主观不确定性对输出性能的方差贡献时,用传统方法,如式(4)和式(5)所示,仍需要进行二重高维积分,取主观变量和客观变量的抽样次数均为 M (通常大于 1000),求解 n 个分布参数主观变

量对输出性能的方差贡献时,总的函数调用次数为 $n \cdot M \cdot M$ 。通过采用上述的乘法降维方法,只需要针对 n 个分布参数主观变量计算 $4n$ 个一维积分,即对 $p(\theta_k)$ 、 $q(\theta_k)$ 、 $p(z_k)$ 和 $q(z_k)$ 的计算。而对于这四者的计算可以采用单层高斯积分求解即可,取单层高斯积分的积分点个数 m ,则求解 n 个分布参数主观变量对输出性能的方差贡献时,总的函数调用次数为 $2 \times n \times m$ 。与传统方法相比更大程度的减少了函数调用次数。

2 算例分析

2.1 数值算例

响应功能函数 $g(\mathbf{x}) = x_1 + x_2 + x_2^2 + x_3^2$,基本变量 x_1 、 x_2 和 x_3 相互独立且服从均值为 μ_i 标准差为 1 的正态分布,即 $x_i \sim N(\mu_i, 1) (i = 1, 2, 3)$,且 $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu$,其中均值 μ 的不确定性采用正态分布来描述,即 $\mu \sim N(3, 1)$ 。Monte Carlo (MC) 方法和降维方法对平均输出性能基于方差的重要性测度指标的计算结果如表 1 所示。

表 1 重要性测度指标

变量	MC (S_i^M)	降维 (S_i^M)
μ_1	0.0109	0.0116
μ_2	0.5468	0.5774
μ_3	0.4312	0.3763

Monte Carlo 方法、降维方法和主、客观分离降维方法针对主观不确定性对各自方差贡献的计算结果如表 2 所示。

表 2 方差贡献结果

变量	MC	降维方法	分离降维方法
μ_1	1.0183	1.3460	1.3435
μ_2	51.0838	63.2619	67.1603
μ_3	40.2841	47.1363	43.7692

根据表 1 可以看出,降维方法和 Monte Carlo 方法对主、总两个重要性测度指标的计算结果基本一致。并且针对二次多项式的响应功能函数,降维方法的积分点个数取为 3 时可以达到 Monte Carlo 方法抽样数为 5000 的计算精度,能够保证该算例的精度。此外,由两种方法的计算量可以看出,针对本算例的 3 维变量,降维方法的积分点个数取为 3 时计

算重要性测度指标总的函数调用次数为 $3 \times (3 + 1) \times 3$,即 36 次。而针对 3 维变量, Monte Carlo 方法抽样数为 5000 时计算重要性测度指标总的函数调用次数为 $5000 \times 5000 \times (3 + 1)$,即 10^8 次,这说明降维法在保证计算精度的同时能够很大程度地提高计算效率。

根据表 2 可以看出, Monte Carlo 方法、降维方法和分离降维方法对于主观不确定性的方差贡献的计算结果基本一致。针对 3 维变量, Monte Carlo 方法抽样数为 5000 时函数调用次数为 $5000 \times 5000 \times 3 = 7.5 \times 10^7$,分离降维方法的积分点个数取为 3 时函数调用次数为 $2 \times 3 \times 3 = 18$,说明分离降维法在保证计算精度的同时能够更大程度地提高计算效率。

2.2 工程算例 1

有一截面为圆形的钢杆,杆的极限状态函数可表达为 $g(R, d, P) = \pi d^2 R / 4 - P$ 。其中圆杆直径 d 、材料的屈服极限 R 和杆承受的轴向力 P 均服从正态分布,各变量的标准差分别为 $\sigma_d = 0.3\text{cm}$, $\sigma_R = 2.5\text{kN/cm}^2$ 和 $\sigma_P = 3\text{kN}$,均值 $\mu = \{\mu_d, \mu_R, \mu_P\}$ 的不确定性均采用正态分布来描述,即 $\mu_d \sim N(3, 0.03^2)$, $\mu_R \sim N(29, 0.25^2)$, $\mu_P \sim N(50, 0.3^2)$ 。Monte Carlo 方法和降维方法对平均输出性能基于方差的重要性测度指标的计算结果如表 3 所示。

表 3 重要性测度指标

变量	MC(S_i^M)	降维(S_i^M)
μ_d	0.8168	0.8431
μ_R	0.1568	0.1524
μ_P	0.0044	0.0044

Monte Carlo 方法、降维方法和主、客观分离降维方法针对主观不确定性对各自方差贡献的计算结果如表 4 所示。

表 4 方差贡献结果

变量	MC	降维方法	分离降维方法
μ_d	17.0871	17.7787	17.1740
μ_R	3.2807	3.2131	3.1915
μ_P	0.0930	0.0925	0.0920

本算例与数值算例的主观变量维数相同,故各方法的函数调用次数与数值算例相同,从本算例同样可以看出降维方法和分离降维方法的高效性与准确性。从表 3 和表 4 可以看出,各主观变量对平均

输出性能方差贡献的重要性排序为 $\mu_d > \mu_R > \mu_P$ ，说明 μ_d 对结构系统平均输出性能方差的影响最大，通过合理控制 μ_d ，可以有效地减小结构系统平均输出响应的变异性，重要性测度的结果也可以为结构系统的设计提供参考。

2.3 工程算例 2

悬臂梁受到载荷作用如图 1 所示，自由端位移为 $D(L,X,Y) = \frac{4L^3}{Ewt} \sqrt{\left(\frac{X}{w^2}\right)^2 + \left(\frac{Y}{t^2}\right)^2}$ ，其中随机变量 X 和 Y 为独立的随机载荷，随机变量 L 为梁的长度（单位为 cm），各变量均为正态分布 $X \sim N(\mu_X, 10^2)$ ， $Y \sim N(\mu_Y, 20^2)$ ， $L \sim N(\mu_L, 2^2)$ 。假设各个变量的均值具有主观不确定性，并且也可以采用正态分布来描述 $\mu_X \sim N(500, 5^2)$ ， $\mu_Y \sim N(1000, 10^2)$ ， $\mu_L \sim N(100, 1^2)$ 。梁的宽度 w 、厚 t 和梁的弹性模量 E 分别取定值 $w = 2.4484\text{cm}$ ， $t = 3.8884\text{cm}$ ， $E = 29\text{GPa}$ 。Monte Carlo 方法和降维方法对平均输出性能基于方差的重要性测度指标的计算结果如表 5 所示。

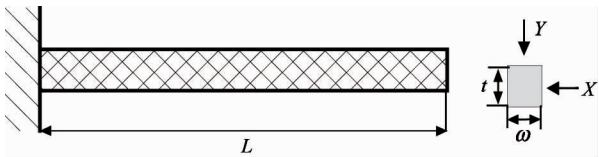


图 1

表 5 重要性测度指标

变量	MC(S_i^M)	降维(S_i^M)
μ_X	0.0377	0.0393
μ_Y	0.0160	0.0157
μ_L	0.9048	0.9450
计算时间	159337s	0.0332s

Monte Carlo 方法、降维方法和主、客观分离降维方法针对主观不确定性对各自方差贡献的计算结果如表 6 所示。

表 6 方差贡献结果

变量	MC(10^{-4})	降维方法 (10^{-4})	分离降维方法 (10^{-4})
μ_X	0.9048	0.9039	0.8924
μ_Y	0.3840	0.3611	0.3589
μ_L	22.8432	21.7350	21.4855
计算时间	159337s	0.0332s	0.0217s

本算例与前两个算例的主观变量维数相同，故各方法函数调用次数的比较与数值算例相似。由于函数形式较为复杂，本算例比较各方法的计算时间，可以更加直观地看出降维方法和分离降维方法的高效性与准确性。从表 5 和表 6 可以看出，梁的长度均值 μ_L 对平均输出性能方差的影响远大于外载均值 μ_X 和 μ_Y 对平均输出性能方差的影响，所以有效地调节该梁的长度均值可以减小平均输出性能的变异性。而外载均值的重要性排序为 $\mu_X > \mu_Y$ ，这说明 μ_X 对结构平均输出性能的可靠性影响较大， μ_Y 的影响较小，通过有效地调节 μ_X 可以提高结构平均输出性能的可靠性。重要性测度的结果也可以为结构系统的设计提供参考。

3 结 论

本文提供了一种分析分布参数主观不确定性对结构系统平均输出性能方差影响的高效近似方法。通过乘法降维方法，将响应功能函数变为一系列一维函数的乘积，便将计算重要性测度时的多维积分近似为一维积分的乘积，再通过高斯积分对一维积分进行近似，从而大大地减少了函数调用次数和计算量。但乘法降维近似方法并不适用于所有函数，具有一定的适用范围。

在实际应用中，我们对那些导致平均输出性能变化较大的量感兴趣，并根据重要性排序结果对其进行有效的控制。从文中算例可以看出，乘法降维近似方法与蒙特卡洛数值模拟方法在重要性排序上具有高度的一致性。

总之，对于重要性测度的计算来说，乘法降维近似方法是一种具有工程适用性的高效近似方法。

附录 A 高斯积分

首先对高斯积分作一定的变形，常见的 Gauss-Hermite 求积公式为

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-x^2} dx \approx \sum_{i=1}^m A_i f(x_i) \tag{31}$$

其中 m 为积分点的个数， A_i 为求积系数， x_i 为相应的求积节点，三者的取值如表 7 所示。

表 7 Gauss-Hermite 的求积节点与求积系数

n	A_i	x_i
1	1.7724538509	0
2	0.8862269255	± 0.7071067812
3	0.2954089752	± 1.2247448714
	1.1816359006	0
4	0.0813128355	± 1.6506801239
	0.8049140900	± 0.5246476233

当被积函数变为 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx$ 时,

作变量替换,令 $t = \frac{x-\mu}{\sqrt{2}\sigma}$, 则求积公式变为

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\sqrt{2}\sigma t + \mu) e^{-t^2} dt \\ &\approx \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{i=1}^m A_i f(\sqrt{2}\sigma t_i + \mu) \end{aligned} \quad (32)$$

结合工程实际,当 $x_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$, $\mu_i = \theta_i \sim N(\mu_{\theta_i}, \sigma_{\theta_i}^2)$, 且 $\sigma_i, \mu_{\theta_i}, \sigma_{\theta_i}$ 为确定常数,取 $m = 3$ 则

$$\begin{aligned} \varphi(\theta_i, \theta_{-i}^*) &= g(u_i(\theta_i), u_{-i}(\theta_{-i}^*))^{1-n} \\ &\cdot \int_{x_i} g(x_i, u_{-i}(\theta_{-i}^*)) f_{x_i}(x_i | \theta_i) dx \\ &\approx g(u_i(\theta_i), u_{-i}(\theta_{-i}^*))^{1-n} \\ &\cdot \left[\frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{j=1}^3 A_j g(\sqrt{2}\sigma_i x_j + \theta_i, u_{-i}(\theta_{-i}^*)) \right] \end{aligned} \quad (33)$$

$$\begin{aligned} p_k &= E_k[\varphi(\theta_k, \theta_{-k}^*)] \\ &= \int_{\theta_k} \varphi(\theta_1^*, \dots, \theta_{k-1}^*, \theta_k, \theta_{k+1}^*, \dots, \theta_n^*) f_k(\theta_k) d\theta_k \\ &\approx \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{s=1}^3 B_s \{ g(u_k(\sqrt{2}\sigma_{\theta_k} \theta_s + \mu_{\theta_k}), u_{-k}(\theta_{-k}^*))^{1-n} \\ &\cdot \left[\frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{j=1}^3 A_j g(\sqrt{2}\sigma_k x_j + \theta_s, u_{-k}(\theta_{-k}^*)) \right] \} \end{aligned} \quad (34)$$

$$\begin{aligned} q_k &= E_k[\varphi(\theta_k, \theta_{-k}^*)^2] \\ &= \int_{\theta_k} \varphi(\theta_1^*, \dots, \theta_{k-1}^*, \theta_k, \theta_{k+1}^*, \dots, \theta_n^*)^2 f_k(\theta_k) d\theta_k \\ &\approx \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{s=1}^3 B_s \{ g(u_k(\sqrt{2}\sigma_{\theta_k} \theta_s + \mu_{\theta_k}), u_{-k}(\theta_{-k}^*))^{1-n} \\ &\cdot \left[\frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{j=1}^3 A_j g(\sqrt{2}\sigma_k x_j + \theta_s, u_{-k}(\theta_{-k}^*)) \right]^2 \} \end{aligned} \quad (35)$$

对于三点高斯积分,计算 p_k 和 q_k 时,函数调用次数仅为 3×3 次。

参考文献

- [1] Der Kiureghian A, Ditlevsen O. Aleatory or epistemic? Does it Matter? *Reliability Engineering and System Safety*, 2009, 31: 105-112
- [2] Guo J, Du X P. Sensitivity analysis with mixture epistemic and aleatory uncertainties. *AIAA Journal*, 2007, 45: 2337-2349
- [3] Helton J C. Alternative representations of epistemic uncertainty. *Reliability Engineering and System Safety*, 2004, 85:1-10
- [4] Saltelli A, Marivoet J. Non-parametric statistics in sensitivity analysis for model output: a comparison of selected techniques. *Reliability Engineering and System Safety*, 1990, 28(2): 229-253
- [5] Sobol I M. Global sensitivity indices for nonlinear mathematical models and their Monte Carlo estimates. *Mathematics and Computers in Simulation*, 2001, 55(1-3): 221-280
- [6] Iman R L, Hora S C. A robust measure of uncertainty importance for use in fault tree system analysis. *Risk Analysis*, 1990, 10(3): 401-406
- [7] Sankararaman S, Mahadevan S. Separating the contributions of variability and parameter uncertainty in probability distributions. *Reliability Engineering and System Safety*, 2013, 112: 187-199
- [8] Zhang X F, Pandey M D. An effective approximation for variance-based global sensitivity analysis. *Reliability Engineering and System Safety*, 2014, 121: 164-174
- [9] Hofer E, Kloos M, Krzykacz-Hansmann B. An approximate epistemic uncertainty analysis approach in the presence of epistemic and aleatory uncertainties. *Reliability Engineering and System Safety*, 2002, 77: 229-238

A dimensional reduction method for analysis of the impact of the epistemic uncertainty of distribution parameters on a structural system's variance of average performance output

Zhang Qiang, Lv Zhenzhou

(School of Aeronautics, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072)

Abstract

To achieve effective control of the average performance output of a structural system, the influence of the epistemic uncertainty of distribution parameters on the average output variance was analyzed. In view of the fact the conventional Monte Carlo analysis method has the shortcomings of lower efficiency and large computational cost, a multiplicative version of the dimensional reduction method (M-DRM) was employed to compute the average output variance-based global sensitivity to reduce the functional function's usage greatly compared to the conventional Monte Carlo method, and the method of separating the aleatory and epistemic uncertainties, combined with the M-DRM method, was used to resolve impact of the epistemic uncertainty of contribution parameters on the average output variance to further improve the computational efficiency while keeping a higher precision.

Key words: epistemic uncertainty, global sensitivity, multiplicative dimension-reduction method