

一种基于相对固定增益的 Kalman 滤波信号跟踪算法^①

王 前^②* * * 胡彩波 **

(* 北京航空航天大学仪器科学与光电学院 北京 100191)

(** 北京卫星导航中心 北京 100094)

摘要 研究了 Kalman 滤波在卫星导航终端信号跟踪中的应用。运用基于 Kalman 滤波形成的信号跟踪环路利用最优估计理论动态调节环路带宽,较好地解决了信号跟踪性能受信号强度和信号动态两因素制约的问题;运用信号系统中的 Z 变换从理论上证明了 Kalman 滤波稳态性能与普通锁相环路的转换联系;分析了 Kalman 滤波的稳态响应特点,借鉴 $\alpha \cdot \beta$ 滤波的固定滤波系数思想,在保留 Kalman 滤波基本递归迭代过程的前提下,利用稳态效应误差恒定的性质,提出了一种基于相对固定增益的 Kalman 滤波信号跟踪算法。该算法采用基于 SNR 的查找表方式(无需计算方式)确定增益系数,以减少滤波的计算量。性能试验结果表明,该算法的鲁棒性较好,能实时跟踪信号变化,信号突变条件下的暂态响应跟踪误差略大于标准算法,稳态条件下的滤波效果与标准算法基本持平。

关键词 信号跟踪, Kalman 滤波, 环路带宽, 滤波增益

0 引言

随着北斗导航系统的正式运营,导航终端逐渐深入应用到经济和国防建设的各个领域。由于应用环境复杂多变,对接收终端的信号处理能力的要求会越来越高。信号跟踪环路是全球导航卫星系统(GNSS)终端的核心处理模块,如何设计跟踪精度高、鲁棒性好的信号环路一直是终端研究的热点课题^[1-3]。

卫星导航的传播信号从信号结构上划分一般分为载波、伪码和数据码三个层次,传统的导航终端信号跟踪一般采用载波环和码环两种环路同时进行二维跟踪处理。两种环路的跟踪原理基本相同,具体的跟踪锁定原理可参考文献[4],其中载波环通常由锁频环辅助锁相环^[5,6]。环路带宽是环路设计中的重要参数,通常先确定该参数的固定值再进行相关滤波参数计算。传统环路已在多种复杂信号环境

中得到应用^[7,8],但环路一直在跟踪灵敏度和跟踪动态之间进行权衡,由于固定带宽的设计思路使得跟踪环路不能够根据应用场景的变化进行实时的、自适应的调整。Kalman 滤波技术较好地解决了传统跟踪环路难以自适应调节环路带宽的难题,它可根据测量输入信号的噪声情况,自动地调节测量值的滤波权重,从而达到较好的滤波效果^[9]。Kalman 滤波在导航终端的信号跟踪^[10,11]、定位解算、多源信息融合优化^[12]等多个阶段都有应用,但计算复杂度高是限制其进入实用阶段的重要因素。如何减少计算量,同时又要保证优良的滤波性能,是迫切需要解决的现实问题。

本文通过研究 Kalman 滤波在信号跟踪过程中的暂态和稳态响应,同时利用 $\alpha \cdot \beta$ 滤波的固定滤波系数思想,设计出了一种简化 Kalman 滤波信号跟踪算法。该算法既考虑了不同状态下的测量值有不同的测量误差,同时也考虑了稳态条件下误差矩阵较

① 国家自然科学基金(41474027)资助项目。

② 男,1978 年生,博士,工程师;研究方向:信息处理;联系人,E-mail: wqaloha@139.com
(收稿日期:2014-05-13)

为恒定的性质,因而可利用相对固定的滤波系数简化 Kalman 滤波的计算量,同时也能获得较好的滤波性能。本文以载波环的实例对该算法进行了验证分析。

1 数学模型

1.1 Kalman 滤波的原型

Kalman 滤波是处理信号跟踪问题的有力工具,可在弱信号和高动态的环境下得到较好的跟踪精度。通过对环路输出的估计误差和相对误差进行持续不断的估计,最终使估计误差的线性二次损耗函数最小化。Kalman 滤波一般包括“预测”和“修正”两个处理过程,其状态估计的表达式如下:

$$\hat{x}(+) = \hat{x}(-) + K(z - H\hat{x}(-)) \quad (1)$$

其中 K 为滤波增益, z 为含噪声的测量向量, H 为观测矩阵向量, $\hat{x}(-)$ 为前一时刻对当前时刻的状态估计值, $\hat{x}(+)$ 为经过估计修正后的当前时刻状态值。

误差估计的表达式为

$$\hat{p}(+) = \hat{p}(-) - K H \hat{p}(-) \quad (2)$$

其中 $\hat{p}(-)$ 为前一时刻对当前时刻的误差估计值, $\hat{p}(+)$ 为当前时刻的误差估计值。上述两式得到的 $\hat{p}(+)$ 和 $\hat{x}(+)$ 与状态转换矩阵相乘求出最终的估计值。

由式(1)和式(2)可知,Kalman 增益矩阵 K 是滤波的核心,Kalman 滤波通过计算准确的增益值来修正状态和误差估计值。增益矩阵是最佳的加权矩阵,涉及到矩阵求逆、矩阵转置、矩阵乘加等多种运算,是滤波过程中计算量最大的部分。

1.2 Kalman 滤波的信号跟踪模型

锁相环路的结构框图如图 1 所示^[13],输入信号与本地产生的同相与正交复现载波相乘实现对输入信号的下变频,再经过一个积分累加器后输出低频信号,鉴相器完成输入信号与复制信号的相位差异分析后将分析结果输入到环路滤波器,最终控制数控振荡器(numerically controlled oscillator, NCO)完成相应频率的输出,从而达到相位锁定的效果。

环路滤波器的重要参数是环路噪声带宽和阶数,其中环路带宽控制了环路的滤波效果,阶数由环路传递函数的零极点个数决定。阶数越高,环路结构越复杂,对动态应力的变化越不敏感,但同时环路的稳定性也越差。

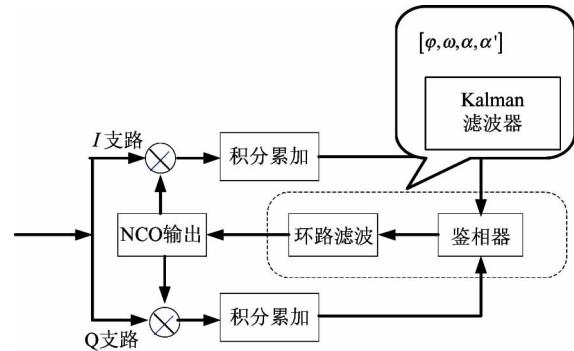


图 1 Kalman 信号跟踪与普通锁相环的结构框图

三阶环路滤波和鉴相器的结构可用如图 1 所示的 Kalman 滤波来代替。Kalman 滤波根据 I 和 Q 支路的积分累加结果,估计信号的相位 φ 、速度 ω 、加速度 α 和加加速度 α' ,同样能够完成滤波输出用来控制本地 NCO 产生载波复制。与传统的环路结构类似,Kalman 滤波增益同样对滤波效果产生重要的影响。因此,需建立 Kalman 滤波增益和噪声带宽的有效联系。

2 Kalman 滤波与普通环路的关系

文献[14]描述了二阶稳态条件下的带宽精确表达式,并指出稳态条件下的 Kalman 性能与数字锁相环基本相同。针对以上结论,本节从理论上进行扩展深化,说明高阶的 Kalman 存在同样的等价关系。上述环路跟踪系统属于离散系统,可对 Kalman 滤波方程进行 Z 变换处理,得到的传输函数表达式为

$$F(z) = \frac{K_0(1-z^{-1})^2 + (K_1 T_s - K_2 T_s^2)(1-z^{-1}) + K_2 T_s^2}{(1-z^{-1})^3} \quad (3)$$

其中 T_s 为采样间隔, K_0, K_1, K_2 为 Kalman 滤波增益系数,在信号滤波的过程中, T_s 的取值非常小,通常是毫秒级别,因此上式可进一步简化为

$$F(z) = \frac{K_0(1-z^{-1})^2 + K_1 T_s(1-z^{-1}) + K_2 T_s^2}{(1-z^{-1})^3} \quad (4)$$

由此可见,通过 Z 变换处理可得到 Kalman 的框架形式与传统跟踪环路基本相同,只是用动态的滤波增益系数代替了传统的固定系数。噪声带宽可定义为系统函数的积分,具体表达式^[15]为

$$2B_L T_u = \frac{1}{H^2(1)} \frac{1}{2\pi j} \oint H(z) H(z^{-1}) z^{-1} dz \quad (H(z) = \frac{F(z)}{1+F(z)}) \quad (5)$$

因此利用增益系数可推导出环路的噪声带宽。增益系数根据测量过程中的噪声变化进行适时优化计算,可得到较传统锁相环路更好的性能。从理论上说,利用每一时刻的精确滤波值可计算出对应的噪声带宽,具体的表达式推导见文献[16]。由文献[16]可知,噪声带宽的解析表达式比较繁琐,无法进行实际应用。但是从 Kalman 滤波的稳定性理论可知,滤波的暂态过程存在不确定性,只要滤波时的初始值在可控的范围内,最终将收敛到一个稳态值。研究 Kalman 滤波的稳态性能比求解实时的噪声带宽具有更大的现实意义。

3 Kalman 滤波的简化算法

本节直接从 Kalman 滤波的稳态性能着手进行相关简化算法的研究。首先分析滤波增益的表达式:

$$K_k = P_k^{-1} H_k^T [H_k P_k^{-1} H_k^T + R_k]^{-1} \quad (6)$$

其中 P_k 为误差矩阵,与激励噪声有关; R_k 与观测噪声有关,下标 k 代表 k 时刻。因此当激励噪声和观测噪声稳定时, H_k 的细微变化会引起滤波增益的相应变化,但总体来说趋近于稳定。下面对式(6)中的各项分式分别进行稳态分析:

$$[H_k P_k^{-1} H_k^T + R_k]^{-1} = \begin{bmatrix} R^{-1} & 0 \\ 0 & R^{-1} \end{bmatrix} \quad (7)$$

$$P_{k+1} = P_k = \begin{bmatrix} P_{00} & P_{01} & P_{02} & P_{03} \\ P_{10} & P_{11} & P_{12} & P_{13} \\ P_{20} & P_{21} & P_{22} & P_{23} \\ P_{30} & P_{31} & P_{32} & P_{33} \end{bmatrix}$$

$$= [P_0, P_1, P_2, P_3] \quad (8)$$

$$H_k = [H_k^1, 0, 0, 0; H_k^2, 0, 0, 0] \quad (9)$$

式(9)中 H_k^1, H_k^2 两分量互为正交,分别代表 I 和 Q 支路分量,结合式(7)、(8)、(9)得到:

$$K_k = [H_k^1 R^{-1} \times P_0; H_k^2 R^{-1} \times P_1] \quad (10)$$

由式(10)可知:滤波增益系数可通过 H_k, R^{-1} 以及误差矩阵列 P_0, P_1 获得。在声噪比(SNR)值恒定的情况下,滤波增益的系数比值就由系统噪声决定。在 SNR 变化的情况下,可通过变化曲线推算 SNR 下的滤波系数。

图 2 表示采用标准 Kalman 滤波后得到的动态增益滤波系数比值,三条曲线分别为 4 个增益系数之间的比值,具体的数值可参见图 2 中的纵坐标。为突出滤波的稳态效果,该图对滤波初期的增益系数进行了限幅处理,最大值设为 80,实际上滤波初期由于是不稳定状态,增益系数最高可达 1000 左右。由图可知,Kalman 滤波在第 800 个采样点之后就趋向稳定。由此可见,Kalman 滤波在进入稳态响应之后,增益系数也趋近稳定。上述试验进一步证明了利用系数恒定规律简化 Kalman 滤波的计算过程。

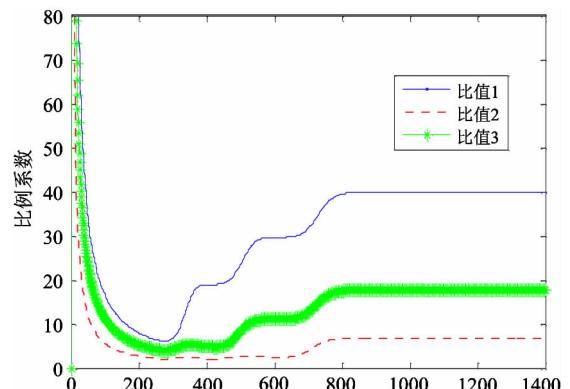


图 2 增益系数比值图

4 复杂度对比分析

软件实现标准 Kalman 滤波器时,每次环路维护计算所需要的计算量如表 1 所示,其中各种运算为浮点标量计算量。表 1 各参数的具体含义如下: Φ 为两时刻间的状态转移矩阵, X 为输入观测量, R 为观测噪声协方差矩阵, Q 为过程噪声协方差矩阵, K

为动态滤波增益。

上述计算过程有较大计算量,特别是在通道较多的情况下。为减小计算量,可采用本文算法实现上述过程。具体的计算量见表 2。对比表 1 和表 2,表 2 所用的乘法、加法和除法的数量远小于表 1 中的数量,可知算法的复杂程度大大减少。

表 1 标准 Kalman 滤波器计算量分析

运算表达式	乘法数量	加法数量	除法数量
$\mathbf{x}_- = \Phi \mathbf{x}_+$	3	2	0
$\mathbf{P}_- = \Phi \mathbf{P}_+ \Phi^T + \mathbf{Q}$	54	45	0
$\mathbf{K} = \mathbf{P}_- \mathbf{H}^T (\mathbf{H} \mathbf{P}_- \mathbf{H}^T + \mathbf{R})^{-1}$	24	15	1
$\mathbf{x} = \mathbf{x}_- + \mathbf{K}(\mathbf{z} - \mathbf{H}\mathbf{x}_-)$	6	6	0
$\mathbf{P}_+ = (\mathbf{I} - \mathbf{K}\mathbf{H})\mathbf{P}_-$	36	27	0
合计	123	95	1

表 2 本文算法实现的计算量分析

运算表达式	乘法数量	加法数量	除法数量
$\mathbf{x}_- = \Phi \mathbf{x}_+$	3	2	0
按估计参数查表得 K			
$\mathbf{x} = \mathbf{x}_- + \mathbf{K}(\mathbf{z} - \mathbf{H}\mathbf{x}_-)$	6	6	0
合计	9	8	0

5 性能验证与分析

为全面检验本文算法的性能,本节通过暂态响应、稳态响应和动态响应这三种不同条件下的试验进行对比分析,从而指出影响算法性能的几个关键要素。下面给出试验的主要参数设置。

观测噪声协方差矩阵为

$$\delta^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\delta \text{ 为噪声方差}) \quad (11)$$

过程噪声协方差矩阵为

$$5Ts^2 \begin{bmatrix} Ts^6/252 & Ts^5/72 & Ts^4/30 & Ts^3/24 \\ Ts^5/72 & Ts^4/20 & Ts^3/8 & Ts^2/6 \\ Ts^4/30 & Ts^3/8 & Ts^2/3 & Ts/2 \\ Ts^3/24 & Ts^2/6 & Ts/2 & 1 \end{bmatrix} \quad (12)$$

Ts 是系统采样周期,为 2ms。

5.1 暂态响应

图 3 对比了两种算法从初始阶段到稳态阶段的频率均方根 (root mean square, RMS) 误差曲线。具

体的表达式为

$$\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n X_i^2}{n}} \quad (X_i \text{ 为误差值}) \quad (13)$$

信号的动态加速度为 100m/s^3 ,这也是常规动态条件下的上限值。动态增益算法在初始时设置的增益系数为零,随着时间的持续,经过最初阶段的剧烈震荡后,在第 700 个采样点之后逐步趋近于误差稳定。而固定增益算法只经过最初的轻微震荡,最大偏差不到 5Hz,就迅速趋于稳定。造成上述现象的原因是:本文算法直接从稳态响应进行分析,去除了滤波初期的算法收敛过程。

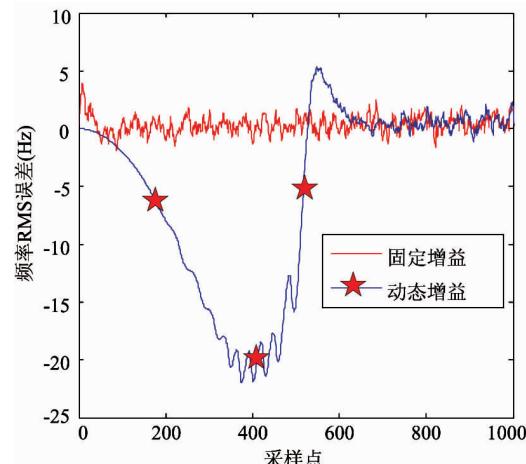


图 3 暂态响应误差对比图

5.2 稳态响应

实验的噪声带宽设定为 500Hz,信号动态条件同 5.1 节。在此条件下,图 4 表示两种方法在不同

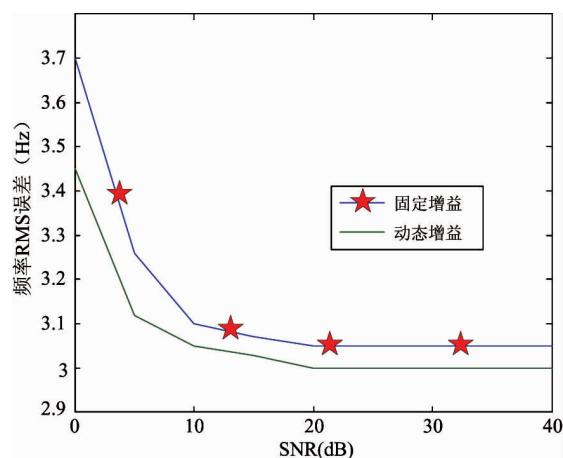


图 4 稳态响应误差对比图

SNR 下的频率 RMS 误差曲线图。为准确评估稳态条件下的性能,一般选取第 2000 个采样点之后的数值参与误差计算。随着 SNR 的增大,频率误差越来越小,基本反映了噪声分量对滤波准确度的影响。动态增益的误差曲线在固定增益的下方,因此其滤波效果普遍优于固定增益,这是由于动态增益每次滤波过程中都经过复杂的数值计算求解出最优值,但优化效果很有限,一般在 0.1 到 0.2Hz 之间。

图 5 反映固定增益算法在 1ms、2ms 和 4ms 不同更新率条件下的频率跟踪误差,由图可知,算法的更新频率越快,得到的频率误差效果越好,同时截止 SNR 值也从 4ms 条件下的 5dB 下降到 1ms 条件下的 -5dB。说明算法的跟踪精度也有大幅度的提高,但缺点是计算量也有所增长。综合图中的三条曲线,尽管频率误差有差异,但一般在 $SNR = 10$ dB 之后趋向稳定值,这说明此时算法在信号变化和环路带宽设置之间基本达到静态的平衡。

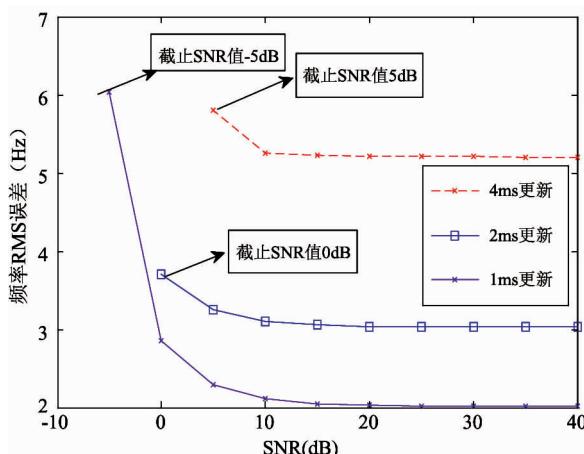


图 5 不同更新率下的性能对比图(相对固定增益)

5.3 动态响应

前文已经提到信号的跟踪精度和动态范围是环路跟踪过程中互为制约的因素。本节重点考察滤波状态处于稳定的过程中,载体的动态和信号的质量突然发生剧烈变化的条件下,环路滤波迅速响应的能力。

试验的场景设置如下:在第 3000 个采样之前,载体的加加速度为 1250m/s^3 , SNR 为 30dB;3000 到 3250 之间,载体加加速度改变为 -5000m/s^3 , SNR

下降为 0dB;3250 到 3500 之间,信号动态为 0, SNR 恢复为 30dB。两种算法的频率误差响应如图 6 和图 7 所示。

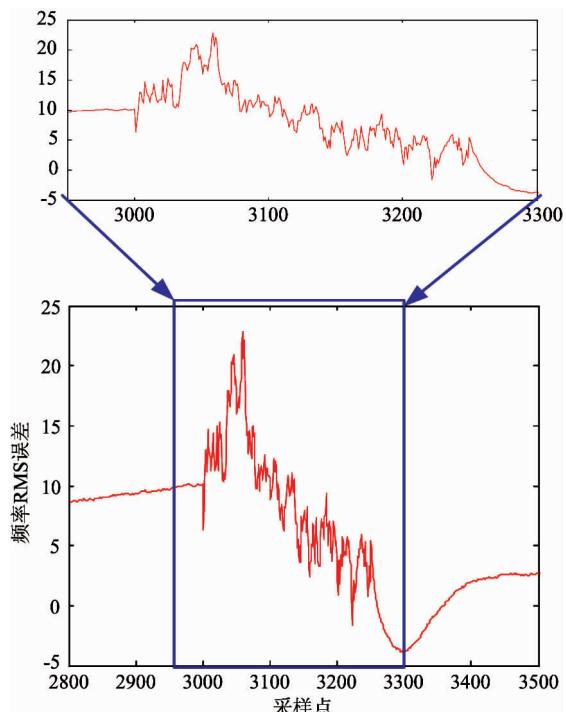


图 6 动态响应性能图(相对固定增益)

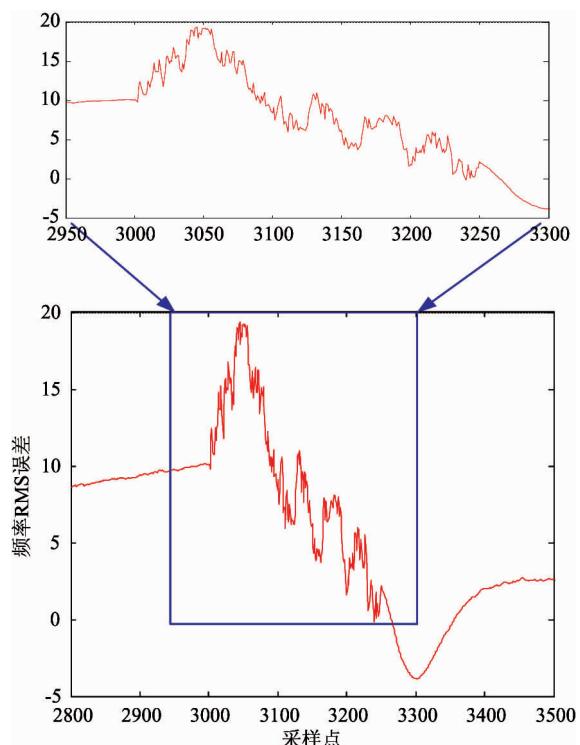


图 7 动态响应性能图(标准滤波)

从理论上说,动态增益滤波可根据信号变化进行适时的优化调节,固定增益的滤波方式调节的精细程度有所欠缺。从试验的结果来看,本文提出的方法在 2800 至 3500 的大区间内频率误差与标准扩展卡尔曼滤波(EKF)的误差效果基本一致,但若把区间缩小到 2950 至 3300 范围内(即图 6 和图 7 中的上半部分),可发现误差已经超过 20Hz,略大于标准 EKF,基本验证了该算法在动态调节方面响应速度的不足。

6 结 论

Kalman 滤波的良好滤波跟踪性能一直受到复杂计算量的制约。本文首先建立了 Kalman 滤波的信号跟踪模型,运用 Z 变换中的传递函数模型从理论上证明 Kalman 滤波的稳态性能与普通锁相环路的转换联系。通过分析滤波增益系数的极限情况,提出了相对固定增益的简化 Kalman 滤波算法,采用基于 SNR 的查找表方式确定了增益系数。性能验证结果表明,本文算法在大幅降低滤波计算复杂度的同时,保持了 Kalman 滤波实时动态调节能力强、滤波精度高且鲁棒性较好的特点。

参考文献

- [1] Bhaskar S, Curran J, Lachapelle G. Effect of Oscillator Quality on Ultra-Tight GPS/INS Aided Carrier Phase Tracking. *PROCEEDINGS OF THE 25TH INTERNATIONAL TECHNICAL MEETING OF THE SATELLITE DIVISION OF THE INSTITUTE OF NAVIGATION (ION GNSS 2012)*, 2012, 137(1):56-66
- [2] Jafarnia-Jahromi A, Lin T, Broumandan A, et al. Detection and Mitigation of Spoofing Attacks on a Vector Based Tracking GPS Receiver. In: Proceedings of the 2012 International Technical Meeting of The Institute of Navigation (2012):790-800, doi: 10.1155/2012/127072
- [3] Dehghanian V, Nielsen J, Lachapelle G. Enhanced GNSS Frequency Tracking in Multipath Environments. In: IEEE Canadian Conference on Electrical and Computer Engineering, Regina, Canada, 2013. 1-6
- [4] 孙礼, 王银锋, 何川等. GPS 信号捕获与跟踪策略确
定及实现. 北京航空航天大学学报, 1999, 25(2):
14-17
- [5] Ward P. Performance Comparisons Between FLL, PLL
and a Novel FLL-assisted-PLL Carrier Tracking Loop Un-
der RF Interference Conditions. In: Proc. ION GPS,
1998. 783-795
- [6] 王俊, 李加琪, 吴嗣亮. 锁频环辅助下锁相环的跟踪
误差分析. 北京理工大学学报, 2011, 31(7): 838-843
- [7] 郑兴平, 寇艳红. 高动态 GPS 接收机环路设计与实
现. 无线电工程, 2010, 40(01): 26-28
- [8] 韩孟飞, 王永庆, 吴嗣亮等. 极低载噪比高动态信号
的载波跟踪锁频环鉴别器. 北京理工大学学报,
2009, 29(3): 245-249
- [9] Hamm C, Flenniken IV W, Bevly D, et al. Comparative
Performance Analysis of Aided Carrier Tracking Loop Al-
gorithms In High Noise/High Dynamic Environments. In:
ION GNSS, Long Beach, 2004
- [10] 罗雨, 王永庆, 罗海坤等. 基于扩展卡尔曼滤波器的
矢量跟踪算法研究. 电子与信息学报, 2013, 35(6):
1400-1405
- [11] Jin L, Li H, Lu M Q, et al. Adaptive Kalman Filter
based Robust Tracking Algorithm for GNSS Signals. In:
China Satellite Navigation Conference (CSNC), 2012
- [12] Lv P, Lu M Q, Yao Z. Dual-Update Rate INS Aided
Carrier Phase Lock Loop for New Generation Global-
Navigation Satellite Signals. In: China Satellite Naviga-
tion Conference (CSNC), 2013. 715-724
- [13] Mark L P, Todd E H, Alessandro P C, et al. Tracking
L1 C/A and L2C Signals through Ionospheric Scintilla-
tions. In: ION GNSS the 20th International Technical
Meeting of the Satellite Division, 2007. 246-268
- [14] Qian Y, Cui X W, Lu M Q, et al. Steady-State Perform-
ance of Kalman Filter for DPLL. *Tsinghua Science and
Technology*, 2009, 14(4): 470-473
- [15] Aguirre S, Hinedi S. Two novel automatic frequency
tracking loops. *IEEE Transaction on Aerospace and Elec-
tronic Systems*, 1989, 25(5): 749-760
- [16] Jury E I. Theory and application of the z-transform meth-
od. New York: Wiley Publishers, 1964

Kalman filter signal tracking based on relatively fixed-gain

Wang Qian * ** , Hu Caibo **

(* School of Instrumentation Science and Photo-electronics Engineering, Beihang University, Beijing 100191)

(** Beijing Satellite Navigation Center, Beijing 100094)

Abstract

The application of Kalman filtering to the signal tracking of satellite navigation terminals was studied. The tracking loop based on Kalman filter structure was applied to dynamical adjustment of the loop bandwidth by utilizing the optimum estimation theory to solve the restriction of signal intension and dynamic on the signal tracking performance. The relation between the Kalman filter stability and the common lock phase loop was theoretically proved by using the Z transformation in the signal system. The steady-state characteristics of the Kalman filter was analyzed, the idea of fixed filter coefficient about $\alpha \cdot \beta$ filtering was adopted, and then, for simplifying the calculation, an algorithm for tracking of Kalman filtering signals based on the relatively fixed-gain was proposed under the condition of keeping the basic recursion process and using the principle of error constant in the steady state. The algorithm uses a SNR based seeking table (without calculation) to determine the gain coefficient to reduce the load burden. The results of the performance test show the algorithm is robust enough to track signal accurately. Its transient response error is a little bigger than that of the standard arithmetic when signals change suddenly. Its steady error is basically same as the standard arithmetic.

Key words: signal tracking, Kalman filter, loop bandwidth, filter gain