

平面 T-Bézier 曲线的几何性质分析^①

方永锋^{②*} 邱泽阳^{**}

(* 贵州工程应用技术学院 机械工程学院 毕节 551700)

(** 兰州交通大学 工业设计研究所 兰州 730001)

摘要 以四个控制顶点的平面 T-Bézier 曲线为主要研究对象,全面分析了平面 T-Bézier 曲线的奇拐点、尖点和凸性性质。分析结果表明,四个控制顶点的平面 T-Bézier 曲线的几何特征可描述成下列情形之一:有一个尖点,有一个或两个拐点,有一个二重结点,处处为凸。给出了这几个情形的相应控制多边形表示的充分必要条件,通过图解说明了平面 T-Bézier 曲线的几何性质。了解 T-Bézier 曲线的几何性质,有助于工程设计人员进行平面自由曲线的设计。

关键词 T-Bézier 曲线, 尖点, 拐点, 结点, 奇拐点

0 引言

Bézier 曲线是计算机辅助几何设计中构造自由曲线、曲面的强有力的工具。平面 Bézier 曲线有其具体的几何性质,知道了其性质,设计人员就能在设计过程中做到心中有数。但是 Bézier 曲线又有许多缺点,例如不能准确表示螺旋线、摆线等,因此其应用受到一定的限制,这引起了研究人员的注意。文献[1]提出了 T-Bézier 曲线,它不但有 Bézier 曲线的优点,还能够精确地表示圆弧、椭圆弧等。文献[2]和文献[3]介绍了 C-Bézier 曲线,并分别讨论了其性质。文献[4]对 $T_3 = span\{1, t, \sin t, \cos t\}$ 的 C-Bézier 曲线的几何性质进行了全面分析,指出了出现尖点、拐点、重结点、奇拐点以及处处为凸的条件。文献[5]分析了 Bézier 曲线的几何性质,得到了很好的结果,对应用 Bézier 曲线进行几何设计具有很大的应用指导价值。本文在文献[6-9]的基础上,对有 4 个控制顶点的 T-Bézier 曲线的几何性质进行了全面详细的分析,指出 T-Bézier 曲线当且仅当符合下列情形之一时成立:有一个尖点,有一个或两个拐

点,有一个二重结点,处处为凸。同时,给出了相应的控制多边形表示的充分必要条件。文献[8,9]指出了参数曲线的几何性质设计该曲线的重要意义。

1 T-Bézier 曲线

给定 4 个控制顶点 d_0, d_1, d_2 和 d_3 , 定义 T-Bézier 曲线的方程为^[3]

$$p(t) = \sum_{j=0}^3 d_j B_{j,3}(t), \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2} \quad (1)$$

其中, $B_{j,3}(t)$ 为 T-Bézier 基函数, $d_j (j = 0, 1, 2, 3)$ 为控制顶点。其矩阵表示形式为

$$p(t) = [1 \quad \sin t \quad \cos t \quad \cos 2t] \cdot \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -1 & -1 & \frac{3}{2} \\ -2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ -\frac{1}{2} & 1 & -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_0 \\ d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix} \quad (2)$$

令

① 国家自然科学基金(51175398), 贵州省自然科学基金(黔科合 J 字[2014]2001), 贵州省省级实验示范教学中心, 贵州省高等学校新能源汽车产学研基地(黔教科 KY[2014]238, KY[2014]226)和贵州工程应用技术学院高层次人才(院科合字 G2013007 号)资助项目。
② 男, 1975 年生, 博士, 副教授; 研究方向: 计算机辅助几何设计与结构可靠性分析与设计的研究; 联系人, E-mail: fangyf_9707@126.com (收稿日期: 2014-12-15)

$$\varphi_0(t) = \frac{3}{2} - 2\sin t - \frac{1}{2}\cos 2t$$

$$\varphi_1(t) = -1 + 2\sin t + \cos 2t$$

$$\varphi_2(t) = -1 + 2\cos t - \cos 2t$$

$$\varphi_3(t) = \frac{3}{2} - 2\cos t + \frac{1}{2}\cos 2t$$

则有

$$p(t) = \varphi_0(t)d_0 + \varphi_1(t)d_1 + \varphi_2(t)d_2 + \varphi_3(t)d_3 \quad (3)$$

再令 $a_i = d_i - d_{i-1} (i = 1, 2, 3)$, 则有

$$p(t) = (\varphi_0(t) + \varphi_1(t) + \varphi_2(t) + \varphi_3(t))a_0 + (\varphi_1(t) + \varphi_2(t) + \varphi_3(t))a_1 + (\varphi_2(t) + \varphi_3(t))a_2 + \varphi_3(t)a_3 \quad (4)$$

若 a_1 不平行于 a_3 , 则 $a_2 = \lambda a_1 + \mu a_3$, 这里 λ, μ 是两个实数。

由于 $\varphi_1(t) + \varphi_2(t) + \varphi_3(t) = 1 - \varphi_0$, 则式(4)可化为

$$p(t) = a_0 + (1 - \varphi_0(t) + \lambda\varphi_2(t) + \lambda\varphi_3(t))a_1 + (\mu\varphi_2(t) + \mu\varphi_3(t) + \varphi_3(t))a_3 \quad (5)$$

其导数为

$$p'(t) = [\sin t \quad \cos t \quad \sin 2t] \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 & 2 \\ -2 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_0 \\ d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix} \quad (6)$$

$$p''(t) = [\sin t \quad \cos t \quad \cos 2t] \cdot \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \\ 2 & -4 & 4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_0 \\ d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix} = (2\sin t + 2\cos 2t)d_0 - (2\sin t + 4\cos 2t)d_1 + (-2\cos t + 4\cos 2t)d_2 + (2\cos t - 2\cos 2t)d_3 \quad (7)$$

2 T-Bézier 曲线的几何性质

2.1 尖点条件

由式(5)得

$$p'(t) = -\varphi_0'(t) + \lambda\varphi_2'(t) + \lambda\varphi_3'(t)a_1$$

$$+ (\mu\varphi_2'(t) + \mu\varphi_3'(t) + \varphi_3'(t))a_3 = 0 \quad (8)$$

由式(6)得

$$\varphi_0' = -2\cos t + \sin 2t$$

$$\varphi_1' = 2\cos t - 2\sin 2t$$

$$\varphi_2' = -2\sin t + 2\sin 2t$$

$$\varphi_3' = 2\sin t - \sin 2t$$

由式(8)得

$$\lambda = \frac{\varphi_0'}{\varphi_2' + \varphi_3'} \quad (9)$$

$$\mu = \frac{\varphi_3'}{\varphi_2' + \varphi_3'}$$

综上,尖点条件为

$$\lambda = \frac{-2\cos t + \sin 2t}{\sin 2t}$$

$$\mu = \frac{2\sin t - \sin 2t}{\sin 2t} \quad (0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}) \quad (10)$$

2.2 拐点条件

图 1 显示了 T-Bézier 曲线的几何特征。

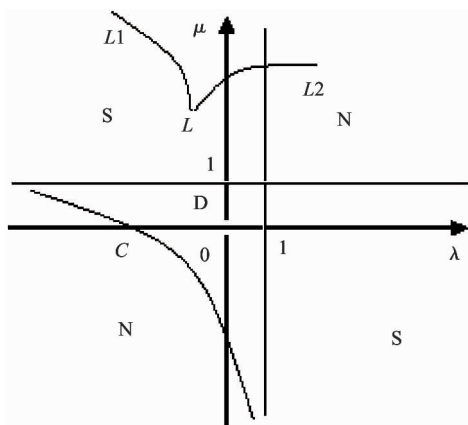


图 1 T-Bézier 曲线的几何特征

由式(10)得其直角坐标方程为

$$\frac{1}{(1-\lambda)^2} - \frac{1}{(1-\mu)^2} = 1$$

$$-\infty < \lambda < 1, -\infty < \mu < 1 \quad (11)$$

这是因为 $\sin t = \frac{1}{1-\lambda}$, $\cos t = \frac{1}{1-\mu}$, 显然曲线 C 是严格凸的连续曲线 $p'(t) \cdot p''(t) = 0$, 即 $p'(t)$ 平行于 $p''(t)$:

$$\frac{-\varphi'_0 + \lambda(\varphi'_2 + \varphi'_3)}{-\varphi''_0 + \lambda(\varphi''_2 + \varphi''_3)} = \frac{\mu(\varphi'_2 + \varphi'_3) + \varphi'_3}{\mu(\varphi''_2 + \varphi''_3) + \varphi''_3} \quad (12)$$

由式(6)、(7)去化简式(12)得

$$\frac{-2\cos t + \sin 2t + \lambda \sin 2t}{-2\sin t - 2\cos 2t + \lambda 2\cos 2t} = \frac{\mu \sin 2t + 2\sin t - \sin 2t}{\mu 2\cos 2t + 2\cos t - 2\cos 2t}$$

整理得

$$\begin{aligned} &\mu(\sin t \sin 2t - 2\cos t \cos 2t) + \lambda(2\sin t \cos 2t \\ &- \sin 2t \cos t) + (\sin 2t \cos t - \sin 2t \sin t - 2\cos 2t \sin t \\ &- 2\cos 2t - 2\cos t \cos 2t) = 0 \end{aligned} \quad (13)$$

式(13)的包络就是拐点的轨迹亦即方程组:

$$\begin{cases} u(\cos t + 3\cos 3t) - 2\lambda(\sin 3t - \sin t - \sin 4t) \\ \quad - (3\sin 3t - 5\sin t + 7\cos t + \cos 3t) = 0 \\ u(\sin t + 9\sin 3t) + 2\lambda(3\cos 3t - \cos t - 2\cos 4t) \\ \quad - (9\cos 3t - 5\cos t - 7\sin t + \sin 3t) = 0 \end{cases} \quad (0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}) \quad (14)$$

其区域如图1所示的D、S所表注的区域,其中,D对应两个拐点,由 $-\infty < \lambda < 1$ 、 $-\infty < \mu < 1$ 及C所围成的区域,S对应一个拐点,由 $\{\lambda \mid \lambda < 1, \mu \geq 1\} \cup \{\mu \mid \lambda \geq 1, \mu < 1\}$ 除 L_1 与 L_2 所围成区域。

2.3 重结点条件

如果有重结点,就应该满足

$$p(t_1) = p(t_2), \quad 0 \leq t_1 < t_2 \leq \frac{\pi}{2} \quad (15)$$

由式(2)、(3)、(4)、(5)及式(11)得

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{\varphi_0(t_1) - \varphi_0(t_2)}{\varphi_2(t_1) + \varphi_3(t_1) - \varphi_2(t_2) - \varphi_3(t_2)} \\ \mu &= \frac{\varphi_3(t_2) - \varphi_3(t_1)}{\varphi_2(t_1) + \varphi_3(t_1) - \varphi_2(t_2) - \varphi_3(t_2)} \end{aligned} \quad (0 \leq t_1 < t_2 \leq \frac{\pi}{2}) \quad (16)$$

亦即:

$$\begin{aligned} \lambda &= \left(\frac{3}{2} - 2\sin t_1 - \frac{1}{2}\cos 2t_1 - \frac{3}{2} + 2\sin t_2 + \frac{1}{2}\cos 2t_2 \right) / \\ &(-1 + 2\cos t_1 - \cos 2t_1 + \frac{3}{2} - 2\cos t_2 + \frac{1}{2}\cos 2t_2 \\ &- 1 - 2\cos t_2 + \cos 2t_2 - \frac{3}{2} + 2\cos t_2 - \frac{1}{2}\cos 2t_2) \end{aligned} \quad (17a)$$

$$\begin{aligned} \mu &= \left(\frac{3}{2} - 2\cos t_2 + \frac{1}{2}\cos 2t_2 - \frac{3}{2} + 2\cos t_1 - \frac{1}{2}\cos 2t_1 \right) / \\ &(-1 + 2\cos t_1 - \cos 2t_1 + \frac{3}{2} - 2\cos t_2 + \frac{1}{2}\cos 2t_2 \\ &- 1 - 2\cos t_2 + \cos 2t_2 - \frac{3}{2} + 2\cos t_2 - \frac{1}{2}\cos 2t_2) \end{aligned} \quad (17b)$$

当 $t_1 = 0$ 时,其图象是图1中的曲线 L_1 :

$$\lambda = \frac{\sin t - 2}{\sin t} \quad (0 < t_1 \leq \frac{\pi}{2}) \quad (18)$$

$$\mu = \frac{1 + 2\cos t + \sin 2t}{\sin 2t}$$

当 $t_2 = \frac{\pi}{2}$ 时,其图像是图1中的曲线 L_2 :

$$\lambda = \frac{-2 + 4\sin t + \cos 2t}{\cos 2t} \quad 0 \leq t_2 < \frac{\pi}{2} \quad (19)$$

$$\mu = \frac{-1 + 4\cos t - \cos 2t}{\cos 2t}$$

其中 L_1 与 L_2 交于点 $(-1, 2)$ 。

2.4 其他

当 a_1 与 a_3 平行时,有两种情况: a_1 与 a_3 同向和 a_1 与 a_3 反向。

2.4.1 a_1 与 a_3 同向

$p(t)$ 无奇点、尖点、拐点、二重结点,处处为凸,如图2所示。

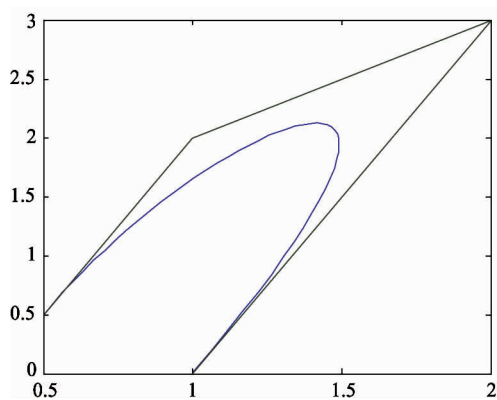


图2 处处为凸

2.4.2 a_1 与 a_3 反向

$p(t)$ 有且仅有一个拐点,无奇点,如图3所示。

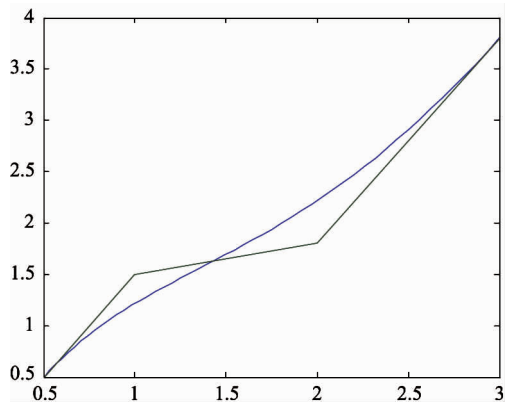


图3 仅有一个拐点,无奇点

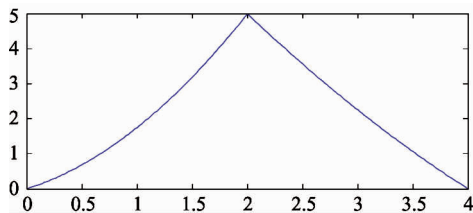


图4 一个尖点

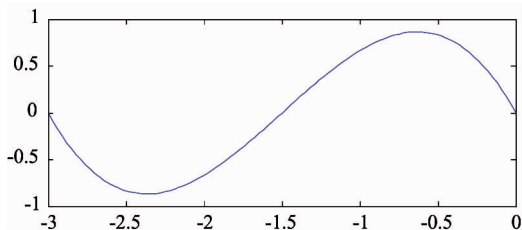


图5 一个拐点

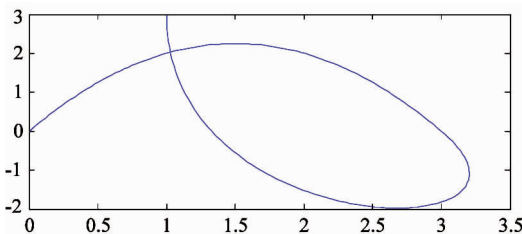


图6 一个重结点

3 分析

在边向量 a_1 平行于 a_3 的情况下,当边向量 a_1 与 a_3 同向时,T-Bézier 曲线 $p(t)$ 无奇点、尖点、拐点二重结点,处处为凸;当边向量 a_1 与 a_3 反向时,T-Bézier 曲线 $p(t)$ 有且只有一个拐点,无奇点。

在边向量 a_1 不平行于 a_3 的情况下,设 $a_2 = \lambda a_1 + \mu a_3$, 则 T-Bézier 曲线 $p(t)$ 奇拐点由 λ, μ 在图 1 中的 λ, μ 坐标的分布决定:

$$(\lambda, \mu) \in$$

- N (含边界 $\{\lambda \mid \lambda \geq 1\} \cap \{\mu \mid \mu \geq 1\}$), 则 $p(t)$ 无拐点,无奇点,为凸曲线;
- S (含边界 $\{\lambda \mid \lambda < 1, \mu \geq 1\} \cup \{\mu \mid \lambda \geq 1, \mu < 1\}$ 但除 L_1 和 L_2), 则 $p(t)$ 有一个拐点,无奇点;
- D , 则 $p(t)$ 有两个拐点,无奇点;
- C , 则 $p(t)$ 有一个尖点,无拐点和重结点;
- L (含边界 L_1 和 L_2), $p(t)$ 有一个重结点,无拐点和尖点。

图 1 中两条直线分别是 $\lambda = 1, \mu = 1$, 式(11)以 $\lambda = 1, \mu = 1$ 为渐进线, L_1, L_2 分别是式(18)、(19)所对应的曲线,即 D, S 是式(14)所对应的区域。

λ, μ 分别在 C, S, L 取不同的值, T-Bézier 曲线就会相应地生成带有一个尖点、一个拐点和一个重结点的曲线, 分别见图 4、图 5 和图 6。

综上所述, T-Bézier 曲线的几何性质简单明了, 一目了然, 易于掌握, 这对进行自由曲线设计很有帮助。

4 结论

本研究进行 T-Bézier 曲线的几何性质, 并给出了可用的研究结果。 $\lambda - \mu$ 平面图详尽包罗了平面 T-Bézier 曲线的各种几何特征, 利用这些结果, 可使曲线设计人员在未生成曲线之前就能够预先估计曲线具有的几何特征, 也可以以此作为生成 T-Bézier 曲线的考虑依据。

参考文献

- [1] 苏本跃, 黄有度. 一类 Bézier 型三角多项式曲线. 高等学校计算数学学报, 2005, 27(3): 202-208
- [2] Zhang J W. C-curves: An extension of cubic curves. *Computer Aided Geometric Design*, 1996, 13(3): 199-217
- [3] 安源, 马彩文, 孙利民等. 基于贝塞尔曲线的 WSN 等值线绘制算法. 高技术通讯, 2010, 20(8): 792-797
- [4] 叶正麟, 吴荣军. 平面 C-Bézier 曲线的奇拐点分析. 计算数学, 2005, 27(1): 63-70

- [5] 施法中. 计算机辅助几何设计与非均匀有理 B 样条. 北京:高等教育出版社, 2001. 8
- [6] 王国瑾,汪国昭,郑建民. 计算机辅助几何设计. 北京:高等教育出版社; 海德堡:施普林格出版社,2001. 7
- [7] 方永锋,邱泽阳. 基于三角函数的 Bézier 曲面的研究与应用. 机械设计, 2008, 25(9): 10-15
- [8] 吴晓勤. 带形状参数的 Bézier 曲线. 中国图象图形学报, 2010, 11(2): 269-274
- [9] Tan J Q, Zhuang X L, Zhang L. A new four-point shape-preserving subdivision scheme. *Computer Aided Geometric Design*, 2014, 31(1): 57-62

Geometric character analysis of planar T- Bézier Curves

Fang Yongfeng^{*}, Qiu Zeyang^{**}

(^{*} School of Mechanical Engineering, Guizhou University of Engineering Science, Bijie 551700)

(^{**} Institute of Industry Design, Lanzhou Jiaotong University, Lanzhou 730001)

Abstract

The character of the singular inflection point, cusp point and convexity of the planar T-Bézier curves created based on four control points is analyzed in detail. The analysis concludes that the geometric character of each T-Bézier curve can be described as one of the cases of one cusp point, one inflection point, one inflection point or two, one dual loop point, and complete convexity. The necessary and sufficient conditions for control of polygon representation corresponding to the above mentioned cases are given, and the geometric character of T- Bézier curves is diagrammatically interpreted. Understanding of T- Bézier curve character is of great help to planar free curve design.

Key words: T-Bézier curve, cusp point, inflection point, loop point, singular inflection point