doi:10.3772/j.issn.1002-0470.2015.10-11.013

随机激励下的随机结构全局灵敏度分析①

周长聪②* 张 峰* 王文选* 程宝山**

(*西北工业大学力学与土木建筑学院 西安 710129)

(**西安电子工程研究所 西安 710100)

摘 要 为了考察处于随机激励下的结构系统的随机不确定性输入参数对结构动力响应的影响,提出了基于动力响应均值的全局灵敏度指标和基于动力响应方差的全局灵敏度指标。结合这两个指标对随机结构在随机激励下的响应进行灵敏度分析,能够对输入参数的重要性作出合理评估,以便为改善结构设计提供有益指导。为求解所提出的全局灵敏度指标,提出了一种基于点估计的高效方法。该方法将所提出的动力响应灵敏度指标视为均值和方差算子的嵌套,通过嵌套使用点估计的方法进行分解降维。通过对某发动机管路系统的算例分析,验证了上述全局灵敏度指标及其求解方法的工程适用性。

关键词 随机激励,随机结构,灵敏度,点估计,发动机管路

0 引 言

随着现代科技的发展,工程结构的使用环境越来越复杂,传统的静力学强度校核理论已不再适用于在冲击振动环境下工作的工程结构,因而进行结构的动力学分析日显重要[1-3]。结构的动力学分析主要包括结构的动力特性分析和动力响应分析两个方面。目前多数研究将结构的参数和外载荷视为确定性值,确定性动力学分析模型显然无法反映结构中的不确定性因素对结构动力特性和动力响应分析结果的影响。结构参数的变异性可能会使结构动力特征具有明显的随机性,最终导致动力响应的大幅度波动。因此,在结构动力学分析中考虑输入参数的随机性具有重要的理论和实际意义[4-7]。

针对受到多源不确定性影响的工程结构,如何考察结构输入对输出的影响,并以此决定重要的输入量,已经成为工程人员的迫切需求。灵敏度分析为解决这一问题提供了有力工具,其研究目标在于模型输入量的不确定性如何影响输出响应的不确定性。根据目前的研究成果,灵敏度分析可以分为两类:局部灵敏度分析和全局灵敏度分析[8,9]。局部灵敏度定义为输入变量分布参数的变化引起输出响应量统计特征变化的比率,可以通过输出响应量统计特征对分布参数的偏导数进行描述。局部灵敏度能够反映输入变量分布参数在名义值处对输出响应量的影响信息,从而为工程设计提供参考,在这一领域国内外已经有大量成熟的研究成果。但是,局部灵敏度不能反映输入变量在整个分布域内对输出响应量的影响。全局灵敏度又被称为重要性测度,定义为输入变量的不确定性对输出响应量不确定性的贡献程度。相比较局部灵敏度,全局灵敏度则能够考虑输入变量的整个分布范围,以衡量输入变量的不确定性对输出响应量统计特征的影响,并对输入变量进行重要性排序[10,11]。目前多数针对工程结构的灵敏度研究是建立在静力学分析的基础上的。相对于静态问题而言,考虑输入因素不确定性的动力学灵敏度分析更加复杂,鲜有文献考虑结构和载

① 国家自然科学基金(51475370)和西北工业大学重大项目培育基金(3102014ZD0031)资助项目。

② 男,1987年生,博士,讲师;研究方向:机械可靠性,优化设计等;联系人,E-mail:changcongzhou@nwpu.edu.cn

(收稿日期:2015-05-21)

荷同时具有随机性的动力学灵敏度分析。然而，结构设计参数的不确定性是普遍存在的，同时结构所承受的外界激励（诸如振动、风荷、冲击等）也往往是具有随机性的，因此展开针对随机结构在随机激励下的灵敏度分析是具有现实意义和必要性的。本文针对随机激励下的随机结构，将提出了考察其动力学响应特征的全局灵敏度指标。同时，为了改进灵敏度分析的计算效率以提高其工程适用性，提出了基于点估计的灵敏度分析方法。最后进行了所提理论及方法用于某液压管路系统的分析，以验证其可行性。

1　随机结构的平稳随机响应分析

首先考虑确定性结构的平稳响应分析，其属于传统随机振动问题的范畴，可以通过多种成熟的方法进行解决。多自由度线性结构受到单源平稳随机激励时的运动方程为[4]

$$[\boldsymbol{M}]\{\ddot{\boldsymbol{y}}\} + [\boldsymbol{C}]\{\dot{\boldsymbol{y}}\} + [\boldsymbol{K}]\{\boldsymbol{y}\} = \{\boldsymbol{p}\}x(t) \tag{1}$$

其中，$\boldsymbol{M}$、$\boldsymbol{C}$、$\boldsymbol{K}$ 分别为结构的质量、阻尼和刚度矩阵，$\ddot{\boldsymbol{y}}$、$\dot{\boldsymbol{y}}$、$\boldsymbol{y}$ 则分别为结构的加速度、速度和位移响应列向量，$\boldsymbol{p}$ 为定常向量，$x(t)$ 为零均值的正态平稳随机过程。

根据随机振动理论，当线性结构受到自谱为 $\boldsymbol{S}_{xx}(\omega)$ 的单点平稳随机激励 $x(t)$ 时，其响应的自功率谱为

$$\boldsymbol{S}_{yy}(\omega) = \boldsymbol{H}^{*}(\omega)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{S}_{ff}(\omega)\boldsymbol{H}(\omega) \tag{2}$$

其中 $\boldsymbol{S}_{yy}(\omega)$ 为响应的功率谱密度阵，$\boldsymbol{S}_{ff}(\omega)$ 为激励的功率谱密度阵，$\boldsymbol{H}(\omega)$ 为结构频率响应函数阵，$\boldsymbol{H}^{*}(\omega)^{\mathrm{T}}$ 为 $\boldsymbol{H}(\omega)$ 的共轭转置矩阵。

得到响应功率谱密度阵 $\boldsymbol{S}_{yy}(\omega)$ 后，可以容易地得到响应的均方差为

$$\boldsymbol{\sigma}_y^2 = \int_{-\infty}^{\infty}\boldsymbol{S}_{yy}(\omega)\,\mathrm{d}\omega \tag{3}$$

其中 $\boldsymbol{\sigma}_y$ 为输出响应的标准差，它是描述结构的动力学响应的重要参数，本文所要讨论的灵敏度分析正是以 $\boldsymbol{\sigma}_y$ 作为研究对象。

以上的动力学分析是针对确定性结构展开的，即结构的质量、阻尼和刚度矩阵均是确定量。事实上，当结构参数（如弹性模量、材料密度、尺寸等）均有随机性时，通过不确定性的传递，输出响应的标准差 $\boldsymbol{\sigma}_y$ 必然也是一个随机变量[2,3]。假设具有随机性的结构参数用 $\boldsymbol{x}$ 表示（$\boldsymbol{x} = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$，$n$ 为随机变量个数），结构响应（诸如位移响应、应力响应等）的标准差 $\boldsymbol{\sigma}_y$ 则可表示为随机变量 $\boldsymbol{x}$ 的函数，记为

$$\boldsymbol{\sigma}_y = g(\boldsymbol{x}) \tag{4}$$

$g(\boldsymbol{x})$ 称为动力响应函数，反映了输入随机变量与输出响应之间的映射关系。$\boldsymbol{\sigma}_y$ 的均值和方差可以通过以下两式求得：

$$E(\boldsymbol{\sigma}_y) = \int g(\boldsymbol{x})f(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} \tag{5}$$

$$V(\boldsymbol{\sigma}_y) = \int [g(\boldsymbol{x}) - E(\boldsymbol{\sigma}_y)]^2 f(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} \tag{6}$$

其中 $f(\boldsymbol{x})$ 是随机变量 $\boldsymbol{x}$ 的联合概率密度函数。

由于 $\boldsymbol{\sigma}_y$ 具有随机不确定性，因此均值和方差是描述其统计特征的重要参数。本文通过全局灵敏度分析，能够考察随机输入变量对 $\boldsymbol{\sigma}_y$ 统计特征的影响程度，为改进结构系统提供有益的信息。

2　随机结构的平稳随机响应全局灵敏度

作为灵敏度分析的一个重要分支，全局灵敏度在工程设计及概率安全评估中具有很重要的作用。通过输入变量的全局灵敏度分析，可以得到变量的重要性排序，进而在设计和优化中重点考虑重要性程度高的输入变量或者忽略重要性程度低的输入变量，对系统工程设计和优化提供重要的指导。因此，国内外已经提出了多种全局灵敏度指标以对基本变量的重要性进行分析。其中，基于方差的灵敏度指标被证明能够有效地描述基本变量对输出响应量的影响。

基于方差的灵敏度分析目标是得到各输入变量对响应量方差的贡献，根据 Sobol 等人提出的方差分解式[9,10]，对于响应模型 $Y = g(x)$，有

$$V(Y) = \sum_{i=1}^{n} V_i + \sum_{i=1,j>i}^{n} V_{ij} + \cdots + V_{1,2,\cdots,n} \tag{7}$$

其中 $V(Y)$ 为输出响应量 Y 的无条件方差，V_i 为输入变量 x_i 对响应量 Y 的一阶方差贡献，可由下式求

得：

$$\begin{aligned} V_i &= V[E(Y \mid x_i)] \\ &= V(Y) - E[V(Y \mid x_i)] \\ &= E[V(Y) - V(Y \mid x_i)] \end{aligned} \tag{8}$$

V_{ij} 以及更高阶的方差项反映的是输入变量间由于响应函数形式而产生的交互作用对响应量方差的贡献。从式(8)可以看到，V_i 衡量的是将 x_i 固定以后响应量方差的平均变化值，V_i 越大，说明 x_i 对响应量变异性的影响越大，反之越小。事实上，一阶方差贡献 V_i 也被称为主贡献，能够较好地反映输入变量对响应量方差的影响，是应用最广泛的全局灵敏度指标之一。

然而，式(8)所给出的灵敏度指标存在较明显的缺陷。当 x_i 固定在不同实现值时，响应量方差的变化值可能是正值，也可能是负值，因此简单地将其取平均值会造成抵消，将低估 x_i 的实际贡献。针对这一问题，Ruan 等人提出了改进的灵敏度指标[11]，本文将其推广用于考察输入参数对随机结构响应的影响，提出两种灵敏度指标，即基于动力响应 $\boldsymbol{\sigma}_y$ 方差的灵敏度指标和基于动力响应 $\boldsymbol{\sigma}_y$ 均值的灵敏度指标。

基于动力响应 $\boldsymbol{\sigma}_y$ 方差的灵敏度指标定义为

$$\eta_{x_i} = \sqrt{E\{[V(\boldsymbol{\sigma}_y) - V(\boldsymbol{\sigma}_y \mid x_i)]^2\}} \tag{9}$$

基于动力响应 $\boldsymbol{\sigma}_y$ 均值的灵敏度指标定义为

$$\delta_{x_i} = \sqrt{E\{[E(\boldsymbol{\sigma}_y) - E(\boldsymbol{\sigma}_y \mid x_i)]^2\}} \tag{10}$$

以上两个全局灵敏度均是从考虑输入变量对输出响应的平均影响出发的，两个指标均克服了传统指标存在的贡献抵消问题，反映了输入随机变量对输出响应统计特征的影响程度。不同点在于前者考虑的是动力响应的方差，而后者考虑的是动力响应的均值。在工程上，均值可以衡量响应的基本性能水平，方差则可以衡量响应的稳健性能。结合两个指标对随机结构在随机激励下的响应进行灵敏度分析，能够给出对输入参数的重要性较完整和可靠的评价。

3 动力响应全局灵敏度的求解方法

在目前的灵敏度分析领域，一个重要的研究内容是如何降低灵敏度指标的计算成本。根据全局灵敏度指标的定义式，在大多数情况下通过 Monte Carlo 数字模拟法得到精确的结果，但是所需要的计算量非常庞大。由于动力学问题的复杂性，工程人员往往需要调用外部有限元程序才能够得到分析结果，当模型计算时间较长时，计算成本会急剧上升。因此，本文提出了一种基于点估计的高效方法，以提高全局灵敏度分析的实用性。

点估计的基本思想是使用目标函数的有限个特定点处的取值来估计目标函数的概率矩，Rosenblueth[12]、Gorman[13] 等人均发展了各自的点估计方法。点估计方法在其适用范围内，在给出较准确结果的同时，能够有效地提高计算效率。通过式(9)和式(10)可以发现，两种指标实际上可以视为是均值和方差算子的嵌套式。基于此，通过点估计进行降维分解，应该能够方便地求得全局灵敏度指标。

3.1 点估计方法

Gorman[13] 及 Seo[14] 等人发展了 Rosenblueth 的思想，采用三点离散分布描述连续分布，得到了三点估计方法。

对于响应函数 $Y = g(x)$，其均值和方差可以通过以下两式得到

$$E(Y) = \sum_{k_1=1}^{3} P_{x_1 \cdot k_1} \sum_{k_2=1}^{3} P_{x_2 \cdot k_2} \cdots \sum_{k_n=1}^{3} P_{x_n \cdot k_n} g(l_{x_1 \cdot k_1}, l_{x_2 \cdot k_2}, \cdots, l_{x_n \cdot k_n}) \tag{11}$$

$$V(Y) = \sum_{k_1=1}^{3} P_{x_1 \cdot k_1} \sum_{k_2=1}^{3} P_{x_2 \cdot k_2} \cdots \sum_{k_n=1}^{3} P_{x_n \cdot k_n} [g(l_{x_1 \cdot k_1}, l_{x_2 \cdot k_2}, \cdots, l_{x_n \cdot k_n}) - E(Y)]^2 \tag{12}$$

其中，第 i 个变量 x_i 的参数 $l_{x_i \cdot k_i}$ 和 $P_{x_i \cdot k_i}(k_i = 1,2,3)$ 是三点离散分布的特征点及相应的权值，它们与输入变量 x_i 的均值 α_{1x_i}、标准差 α_{2x_i}、偏度 α_{3x_i} 和峰度 α_{4x_i} 有关，可采用下式计算得到：

$$P_{x_i \cdot 1} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\alpha_{3x_i} / \sqrt{4\alpha_{4x_i} - 3\alpha_{3x_i}^2}}{\alpha_{4x_i} - \alpha_{3x_i}^2}\right) \tag{13}$$

$$P_{x_i \cdot 2} = 1 - \frac{1}{\alpha_{4x_i} - \alpha_{3x_i}^2} \tag{14}$$

$$P_{x_i\cdot 3}=\frac{1}{2}\left(\frac{1-\alpha_{3x_i}/\sqrt{4\alpha_{4x_i}-3\alpha_{3x_i}^2}}{\alpha_{4x_i}-\alpha_{3x_i}^2}\right) \tag{15}$$

$$l_{x_i\cdot 1}=\alpha_{1x_i}-\frac{\alpha_{2x_i}}{2}\left(\sqrt{4\alpha_{4x_i}-3\alpha_{3x_i}^2}-\alpha_{3x_i}\right) \tag{16}$$

$$l_{x_i\cdot 2}=\alpha_{1x_i} \tag{17}$$

$$l_{x_i\cdot 3}=\alpha_{1x_i}+\frac{\alpha_{2x_i}}{2}\left(\sqrt{4\alpha_{4x_i}-3\alpha_{3x_i}^2}+\alpha_{3x_i}\right) \tag{18}$$

3.2 基于点估计的动力响应灵敏度分析方法

对于灵敏度指标 η_{x_i} 的计算,需要首先求得 $E\{[V(\boldsymbol{\sigma}_y)-V(\boldsymbol{\sigma}_y\mid x_i)]^2\}$,将其分解为内外两部分,其中 $V(\boldsymbol{\sigma}_y)$ 可以通过式(12)得到。求解 $V(\boldsymbol{\sigma}_y\mid x_i)$ 时,将 x_i 固定,仅将其它的输入参数(记为 $\boldsymbol{x}_{-i}$,$\boldsymbol{x}_{-i}=(x_1,\cdots,x_{i-1},x_{i+1},\cdots,x_n)$)视为随机变量,可以得到 $V(\boldsymbol{\sigma}_y\mid x_i)$ 的点估计表达式为

$$\begin{aligned}V(\boldsymbol{\sigma}_y\mid x_i)=&\sum_{k_1=1}^{3}P_{x_1\cdot k_1}\cdots\sum_{k_{i-1}=1}^{3}P_{x_{i-1}\cdot k_{i-1}}\sum_{k_{i+1}=1}^{3}P_{x_{i+1}\cdot k_{i+1}}\cdots\\&\sum_{k_n=1}^{3}P_{x_n\cdot k_n}[g(l_{x_1\cdot k_1},\cdots,l_{x_{i-1}\cdot k_{i-1}},x_i,\\&l_{x_{i+1}\cdot k_{i+1}},\cdots,l_{x_n\cdot k_n})-E(\boldsymbol{\sigma}_y\mid x_i)]^2\end{aligned} \tag{19}$$

其中

$$\begin{aligned}E(\boldsymbol{\sigma}_y\mid x_i)=&\sum_{k_1=1}^{3}P_{x_1\cdot k_1}\cdots\sum_{k_{i-1}=1}^{3}P_{x_{i-1}\cdot k_{i-1}}\sum_{k_{i+1}=1}^{3}P_{x_{i+1}\cdot k_{i+1}}\cdots\\&\sum_{k_n=1}^{3}P_{x_n\cdot k_n}g(l_{x_1\cdot k_1},\cdots,l_{x_{i-1}\cdot k_{i-1}},x_i,\\&l_{x_{i+1}\cdot k_{i+1}},\cdots,l_{x_n\cdot k_n})\end{aligned} \tag{20}$$

将式(19)的计算结果代入 $[V(\boldsymbol{\sigma}_y)-V(\boldsymbol{\sigma}_y\mid x_i)]^2$,则其转化为仅含 x_i 的表达式,将其定义为一元函数

$$\varphi(x_i)=[V(\boldsymbol{\sigma}_y)-V(\boldsymbol{\sigma}_y\mid x_i)]^2 \tag{21}$$

则有

$$E[\varphi(x_i)]=E\{[V(\boldsymbol{\sigma}_y)-V(\boldsymbol{\sigma}_y\mid x_i)]^2\} \tag{22}$$

对于一元函数 $\varphi(x_i)$ 的期望,再次使用点估计可以得到

$$\begin{aligned}E[\varphi(x_i)]=&P_{x_i\cdot 1}\varphi(l_{x_i\cdot 1})+P_{x_i\cdot 2}\varphi(l_{x_i\cdot 2})\\&+P_{x_i\cdot 3}\varphi(l_{x_i\cdot 3})\end{aligned} \tag{23}$$

至此,可以得到灵敏度指标 η_{x_i} 的点估计结果。

对于灵敏度指标 δ_{x_i},则需要求得 $E\{[E(\boldsymbol{\sigma}_y)-E(\boldsymbol{\sigma}_y\mid x_i)]^2\}$。与求解 η_{x_i} 时的步骤相类似,将式(20)的结果代入 $[E(\boldsymbol{\sigma}_y)-E(\boldsymbol{\sigma}_y\mid x_i)]^2$,可以得到仅含 x_i 的表达式,记为

$$\phi(x_i)=[E(\boldsymbol{\sigma}_y)-E(\boldsymbol{\sigma}_y\mid x_i)]^2 \tag{24}$$

进而有

$$E[\phi(x_i)]=E\{[E(\boldsymbol{\sigma}_y)-E(\boldsymbol{\sigma}_y\mid x_i)]^2\} \tag{25}$$

使用点估计得到一元函数 $\phi(x_i)$ 的期望,即得到灵敏度指标 δ_{x_i} 的点估计结果。

以上所提出的算法实际上是一种嵌套的点估计方法,由于所提出的动力响应灵敏度指标实际上是均值和方差算子的嵌套,因此能够通过点估计的方法进行分解降维。所提方法能够实施的重要原因在于当输入变量互相独立时,变量所取的特征点不受其他变量的影响,仅取决于该变量的分布参数。所提出的基于点估计的灵敏度分析方法对于输入变量的分布类型没有限制,能够方便地应用于包含非正态变量的情况中。所提方法中需要求解基本变量的前四阶矩,这对于工程上常见的分布类型是容易得到的。

4 算例分析

4.1 单自由振子体系

单自由度线性体系受单源平稳随机激励时的运动方程可表示为[6]

$$m\ddot{y}+c\dot{y}+ky=f(t) \tag{26}$$

其中 m 为质量,c 为阻尼,k 为刚度。系统阻尼比 $\zeta=c/(2\sqrt{mk})$,采用无量纲参数,$f(t)$ 为一平稳随机过程,自谱为常值 $S_{ff}(\omega)=S_0=1$,考虑 ζ、m、k 为随机变量情况时各参数随机性对质点位移响应 y 标准差的影响。ζ、m、k 的均值分别为 0.05、1、1,当其视为随机变量时,认为服从变异系数为 v 的正态分布。

对于单自由度振子体系,响应 y 的功率谱密度具有解析表达式

$$S_{yy}(\omega)=|H(\omega)|^2S_{ff}(\omega)=\frac{S_0}{(k-m\omega^2)^2+c^2\omega^2} \tag{27}$$

其输出响应标准差的解析解为

$$\sigma_y = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} S_{yy}(\omega)\mathrm{d}\omega} = \sqrt{\frac{\pi S_0}{2\zeta k\sqrt{mk}}} \qquad (28)$$

表 1 中列出了当输入随机变量的变异系数取不同值时,使用本文方法和 Monte Carlo 方法所得到动力输出的均值、方差以及全局灵敏度结果。可以看到,所提方法保持了很高的计算精度。同时,所提方法所需要计算响应模型的次数为 324 次,而 Monte Carlo 方法则计算了 1×10^6 次,因此所提方法大大提高了分析效率。

以当随机变量变异系数为 0.1 时的情况为例,进一步分析表 1 中的全局灵敏度结果。可以看到,根据基于动力响应 $\boldsymbol{\sigma}_y$ 方差的灵敏度指标,有 $\eta_k > \eta_\zeta > \eta_m$,即说明刚度 k 对动力响应 $\boldsymbol{\sigma}_y$ 的方差影响最大,其次是 ζ,最后是 m。根据基于动力响应 $\boldsymbol{\sigma}_y$ 均值的灵敏度指标,有 $\delta_k >> \delta_m$,得到输入随机变量对动力响应 $\boldsymbol{\sigma}_y$ 均值的贡献从高到底依次是 k,ζ,m。通过全局灵敏度分析给出的输入参数对输出响应影响程度的定量评估,能够为改进工程设计、提高结构性能提供有益指导。

表 1 单自由度振子体系的动力响应灵敏度

		$E(\sigma_y)$	$V(\sigma_y)$	η_ζ	η_m	η_k	δ_ζ	δ_m	δ_k
	Monte Carlo 法	5.673	0.296	0.089	0.025	0.192	0.295	0.144	0.438
$v=0.1$	本文方法	5.673	0.296	0.087	0.024	0.191	0.290	0.144	0.436
	误差	0	0	2.3%	4%	0.5%	0.2%	0	0.5%
	Monte Carlo 法	5.648	0.184	0.055	0.014	0.122	0.229	0.114	0.347
$v=0.08$	本文方法	5.648	0.184	0.053	0.015	0.120	0.229	0.114	0.344
	误差	0	0	3.6%	7.1%	1.6%	0	0	0.9%
	Monte Carlo 法	5.622	0.07	0.020	0.005	0.045	0.143	0.071	0.211
$v=0.05$	本文方法	5.622	0.07	0.020	0.005	0.045	0.141	0.070	0.212
	误差	0	0	0	0	0	1.4%	1.4%	0.5%

4.2 某发动机液压管路系统

管路系统是发动机介质传输和能量传递的重要通道,但是恶劣的振动工作环境造成管路系统连接部件的松动、泄露和裂纹等动强度失效问题突出[15,16]。经典的结构分析假定结构刚度、质量、阻尼等都是确定性的参数,事实上由于材质、制造工艺等因素,这些参数都具有一定的离散性,这些离散性往往对结构系统的性能产生重要影响。在本例中,将使用随机分布描述输入参数的离散性,并考察其对管路系统动力响应的影响程度。

如图 1 中的某型发动机液压管路系统,该系统由多个单元组成,包括弹性直管、弹性弯管、丁字管、管夹、阀门、法轮盘、软管等,通过多个固定端和管夹支撑。固定端可以约束管路系统在该位置的所有自由度,而管夹则仅仅约束管路系统在该位置的径向位移,采用两个弹簧单元模拟。如图 2 所示,随机振动谱可以通过固定端和管夹从基础传递到管路系统,且由固定端传入系统和由管夹传入系统的效率是不一样的,这一效率系数可以通过 ANSYS 软件中的比例因子进行定义,固定端的比例因子或效率系

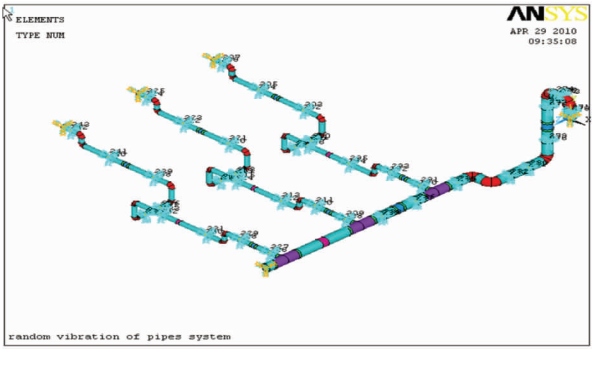

图 1 液压管路系统有限元模型

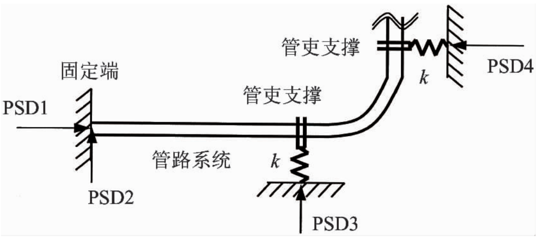

图 2　固定端和卡箍传递外场激励

数定义为 1,而管夹的比例因子为 0.5。在本算例中,假定所有的约束(固定端和管夹)受到相同的基础激励(加速度功率谱密度(power spectrum density, PSD))。

将管路材料弹性模量 E、泊松比 γ、材料密度 ρ、管内流体密度 ρ_1、卡箍支撑刚度 K 考虑为服从正态分布的随机变量,其统计特征如表 2 所示。

表 2　管路系统中的随机变量及其分布信息

输入变量	分布类型	均值	变异系数
E (Pa)	正态	2×10^{12}	0.1
γ	正态	0.3	0.1
ρ (kg/m^3)	正态	7800	0.1
ρ_1 (kg/m^3)	正态	900	0.1
K (Pa)	正态	1×10^{7}	0.1

使用本文所提出的动力响应灵敏度指标考察输入随机变量对输出响应的影响程度。考虑管路系统的三种输出:最大速度响应标准差,最大位移响应标准差,以及最大轴向应力响应标准差。使用所提方法计算得到最大速度响应标准差的期望和方差分别为0.583和0.016,而使用 Monte Carlo 法计算 1×10^4 次后的期望和方差分别为0.057和0.015,这说明本文所提方法适用于本算例。在计算灵敏度指标时,由于该算例包含有限元模型的计算,若使用 Monte Carlo 方法计算成本将非常巨大,而所提方法则仅需要 1458 次模型计算,因此仅使用所提方法进行灵敏度分析。

图 3 ~ 图 5 给出了管路系统的灵敏度分析结果。可以看到,本文所提出的全局灵敏度指标能够清晰、定量地给出输入参数对结构响应的贡献程度。显然,材料弹性模量 E、材料密度 ρ、管内流体密度 ρ_1 对液压系统动力学响应的贡献较大,尤其是弹性模量 E,而泊松比 γ 和卡箍支撑刚度 K 的贡献几乎可以忽略。这说明,在改进液压管路系统时,应重点考虑对结构响应贡献大的输入参数,例如材料的弹性模量。这在工程实际中是十分有意义的,尤其是当结构系统的设计参数较多时,可以通过本文所提出的全局灵敏度指标对具有不确定性的设计参数进行分析,甄选出其中对结构响应有显著影响的参数,进而重点对这些参数进行优化设计,可以大大降低计算工作量,提高优化效率。

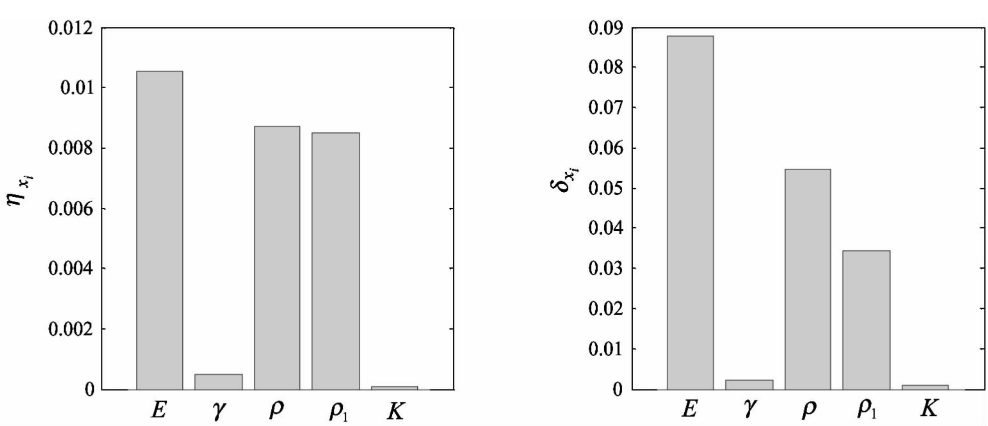

图 3　最大速度响应标准差的全局灵敏度

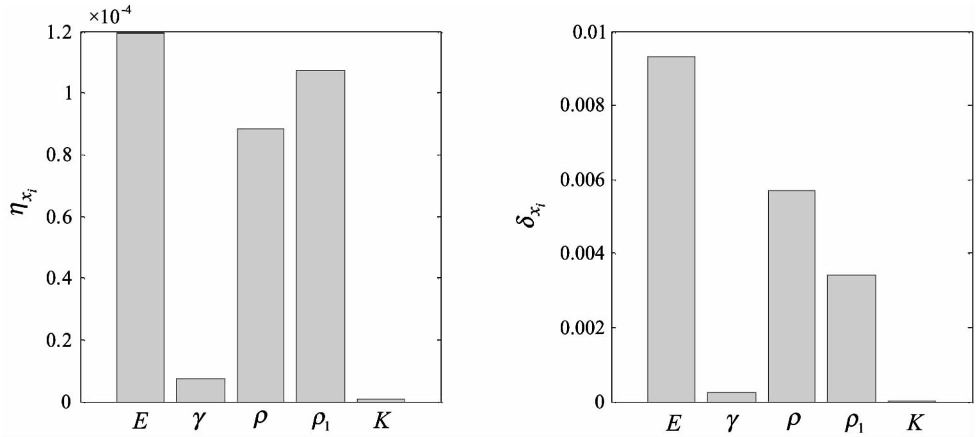

图 4　最大位移响应标准差的全局灵敏度

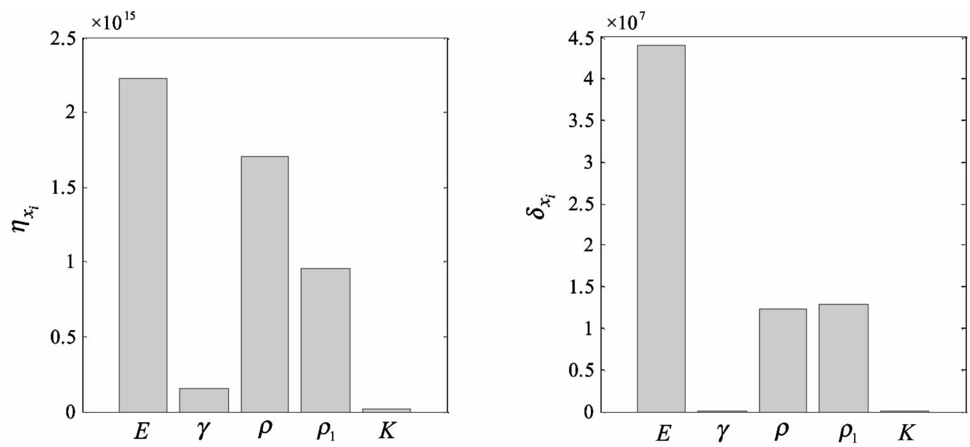

图 5　最大轴向应力响应标准差的全局灵敏度

5　结　论

随机结构在随机激励下的响应研究是结构动力学的重要组成部分。由于结构参数、外载、材料等输入参数往往存在不确定性,进而影响结构系统的动力学响应。针对这一问题,本文提出了适用于动力学分析的全局灵敏度指标,用于评估具有随机性的输入参数对结构动力学响应的影响程度。根据得到的灵敏度信息,设计人员可以有针对性地关注具有重要贡献的结构参数,指导优化设计。由于动力学问题的复杂性,工程人员往往需要调用外部有限元程序才能够得到灵敏度分析结果,当模型计算时间较长时,传统的 Monte Carlo 数字模拟法将需要高昂的计算成本。因此,本文提出一种基于点估计的高效方法,以提高全局灵敏度分析的实用性。所提出的算法实际上是一种嵌套的点估计方法,将所提出的动力响应灵敏度指标视为均值和方差算子的嵌套,通过点估计的方法进行分解降维。对文中算例的研究表明,所提出的灵敏度指标及其求解方法是具有实际意义和工程适用性的。

参考文献

[1] Zhou C, Lu Z, Yuan X. Use of relevance vector machine in structural reliability analysis. *Journal of Aircraft*, 2013, 50(6): 1726-1733

[2] 乔红威,吕震宙. 随机激励下随机结构动力可靠性灵敏度分析. 振动工程学报, 2008, 21(4): 404-408

[3] 胡太彬,陈建军,高伟等. 平稳随机激励下随机桁架结构动力可靠性分析. 力学学报, 2004, 36(2): 242-246

[4] 林家浩,张亚辉. 随机振动的虚拟激励法. 北京:科学出版社, 2004. 12-24

[5] 张义民,吕春梅,周娜等. 动态结构系统可靠性的频率灵敏度分析. 力学学报, 2008, 40(5): 716-720

[6] 林家浩,易平. 线性随机结构的平稳随机响应. 计算力学学报, 2001, 18(4): 402-408

[7] 陈建兵,李杰. 复合随机振动系统的动力可靠度分析. 工程力学, 2005, 22(3): 52-57

[8] Zhou C, Lu Z, Li L, et al. A new algorithm for variance based importance analysis of models with correlated inputs. *Applied Mathematical Modelling*, 2013, 37: 864-875

[9] Sobol I M. Global sensitivity indices for nonlinear mathematical models and their Monte Carlo estimates. *Mathematics and Computers in Simulation*, 2001, 55(1): 221-80

[10] Saltelli A, Marivoet J. Non-parametric statistics in sensitivity analysis for model output: a comparison of selected techniques. *Reliability Engineering and System Safety*, 1990, 28: 229-253

[11] Ruan W, Lu Z, Tian L. A modified variance-based importance measure and its solution by state dependent parameter. *Journal of Risk and Reliability*, 2012, 227(1): 3-15

[12] Rosenblueth E. Two-point estimates in probability. *Applied Mathematical Modeling*, 1981, 5(5): 329-335

[13] Gorman M. Structural resistance moments by quadrature. *Structural Safety*, 1984, 2(2): 73-81

[14] Seo H S, Kwak B M. Efficient statistical tolerance analysis for general distributions using three-point information. *International Journal of Production Research*, 2002, 40(4): 931-944

[15] Tang Z, Lu Z. Optimal design of the positions of the hoops for a hydraulic pipelines system. *Nuclear engineering and design*, 2011, 241(12): 4840-4855

[16] 刘伟,曹刚,翟红波等. 发动机管路卡箍位置动力灵敏度分析与优化设计. 航空动力学报, 2012, 27(12): 2756-2762

Global sensitivity analysis for stochastic structures under random excitation

Zhou Changcong*, Zhang Feng*, Wang Wenxuan*, Cheng Baoshan**

(*School of Mechanics, Civil Engineering and Architecture, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710129)

(**Xi'an Electronic Engineering Research Institute, Xi'an 710100)

Abstract

In order to study the impact of input parameters with stochastic uncertainty of a structural system under random excitation on the system's dynamic response, a global sensitivity index based on the expectation of dynamic response and a global sensitivity index based on the variance of dynamic response are proposed. The two indexes can be used to analyze the sensitivity of a stochastic structure's response to random excitation, thus the importance of input parameters can be reasonably estimated to provide helpful ideas for the improvement of structural design. Furthermore, an efficient algorithm based on point estimate is proposed to calculate the global sensitivity indices. The proposed algorithm is actually a nested point estimation method, which takes advantage of the fact that the global sensitivity indices can be viewed as nested expressions of expectation and variance operators. The engineering applicability of the proposed sensitivity indices and their computational algorithm is verified through their application to an engine pipeline system.

Key words: random excitation, stochastic structure, sensitivity, point estimate, engine pipeline