

不同重力条件下含铰间间隙空间机械臂 PD^μ-SMC 轨迹跟踪控制^①

刘福才^{②*} 夏 威* 秦 利^{③*} 侯甜甜* ** 郭 宇*

(* 燕山大学西校区工业计算机控制工程河北省重点实验室 秦皇岛 066004)

(** 北京交通大学海滨学院电子信息与控制工程系 沧州 061100)

摘 要 研究了重力对含铰间间隙空间机械臂的轨迹跟踪控制的影响。针对空间机械臂在安装、调试阶段处于地面重力环境,在应用过程中处于空间微重力环境,重力环境的改变会使得在地面设计、装配、调试好的控制器在空间应用时达不到良好的控制精度和效果的问题,设计了不需被控对象模型的分数阶 PD 滑模控制器 (PD^μ-SMC) 对含铰间间隙空间机械臂进行控制,并基于李亚普诺夫理论证明了渐近稳定性。仿真结果表明该控制策略能有效地抑制外部干扰,实现含铰间间隙空间机械臂在不同重力环境及存在外部扰动情况下仍然能对期望轨迹进行准确快速跟踪。

关键词 空间机械臂, 不同重力条件, 铰间间隙, 分数阶, 滑模控制器 (SMC)

0 引 言

空间机械臂技术是进行航天器在轨监视和维修的关键技术^[1]。在复杂的空间微重力环境中,空间机构执行在轨服务任务中会受到多种因素的干扰,包括空间环境超高真空、高低温交变及微重力等因素以及机构自身所带来的摩擦、铰间间隙、柔性因素,这些因素均会对空间机构操作精度产生影响。铰间间隙给空间机构带来的非线性因素会导致伸展机构失稳、定位精度不够、天线打开失灵等情况,导致航空航天器失效^[2-4]。铰间间隙与摩擦、微重力等多种因素耦合作用会严重影响实际机构的动力学特性,使得实际机构与理想机构运动产生较大偏差。

空间机构在地面安装、调试处于地面重力环境,而在空间应用过程中处于微重力环境。对于不同重力环境下空间机构运动的差异,文献[5]指出在运动参数恒定的条件下,空间机构运动所需的驱动力将随运动副界面所受重力的变化而变化。文献[6]指出含间隙可展机构在有重力和无重力环境下动力

学行为有较大差别。文献[7]通过仿真试验验证了在有重力和无重力下滚珠轴承的运动与摩擦力阈值有明显的不同。

作为空间机构中重要组成部分的空间机械臂承担着抓取卫星、飞船对接等任务^[8,9],分析不同重力条件下含铰间间隙机械臂具有一定的现实意义。目前大多数铰间间隙机械臂的研究集中在机构动力学精确建模以及运动学精度提高上。文献[10]针对含间隙服务机械臂的关节读数漂移问题,提出一种基于视觉标记物的在线校准方法。文献[11]提出了一种考虑铰间间隙的空间机械臂系统数值分析方法。文献[12]研究了谐波齿轮传动对间隙机构动力学特性的影响。文献[13]针对空间机械臂辅助对接任务中的复杂关节力矩控制问题,建立了含间隙、非线性刚度及啮合阻尼的多级行星齿轮传动复杂关节精细动力学模型。文献[14]针对含空间机械臂关节磨损搭建了气动加载装置,以实现空间机械臂关节铰磨损模拟。

分析现有文献,从控制角度出发对于含铰间间

① 863 计划(2013AA ***),国家自然科学基金(51605415)和河北省自然科学基金(F2015203362,F2016203494)资助项目。
② 男,1966 年生,博士,教授;研究方向:空间机构运动行为分析与控制;联系人,E-mail: lfc@ ysu. edu. cn
③ 通讯作者,E-mail: ql@ ysu. edu. cn
(收稿日期:2017-02-23)

隙空间机械臂进行的研究相对较少。重力环境的改变,使得在地面设计、装配、调试好的控制器在空间应用时达不到良好的精度和效果^[15],从而影响了机械臂末端轨迹跟踪控制精度^[16]。但是对于空间机构地面模拟试验条件苛刻并且与实际空间微重力环境有一定的差异^[17]。虽然国内外相关机构与学者在地面通过吊丝、水浮、气浮等方式对机械臂系统进行了微重力环境模拟,但这些手段并不能完全消除重力对于机械臂系统的影响。文献[18]给出了空间机械臂在地面模拟试验与空间在轨试验末端轨迹跟踪误差对比实验结果,两者有较大差别。例如在Z轴方向,机械臂在地面悬吊试验的定位误差为2mm,而通过航天器在轨试验的定位误差则为5.3mm。因此有必要设计不同重力环境下自适应的控制器,使得在地面调试好控制系统在空间微重力环境下也能获得良好的控制精度。文献[19]提出了一种基于自抗扰控制器的控制方法,可以实现不同重力环境下空间机械臂的轨迹跟踪。

比例微分(PD)控制作为最常用的机械臂控制方式,具有不需要精确对象模型的特点,文献[20]研究表明PI^λD^μ相较于传统比例积分微分(PID)控制器,对于非线性被控对象有着更好的控制效果和扰动抑制能力;滑模控制器(sliding mode controller, SMC)对系统的不确定性具有强鲁棒性,因此被广泛应用于机械臂的控制系统中^[21]。本文针对含铰间间隙空间机械臂在工作环境中对重力释放效应与重力对驱动力耦合作用情况,结合分数阶PID控制器与滑模控制器(SMC)思想,设计了一种在重力环境调试完成后,在不同重力环境下均适用的PD^μ-SMC控制器。并基于Lyapunov定理证明了闭环系统的全局渐进稳定性。最后通过Matlab仿真验证了本文所提出控制器的有效性。

1 系统模型

1.1 含铰间间隙机械臂系统描述

为了能够清晰地体现间隙与重力耦合对机械臂末端轨迹的影响,在构建模型时忽略机械臂柔性、关节润滑等因素,并做如下假设:

- (1) 机械臂为刚性系统;
- (2) 系统为基座固定的二连杆机械臂系统;
- (3) 空间忽略微重力;
- (4) 间隙铰运动过程中,轴颈为刚体(不发生变形),轴套为柔性体(可发生变形)^[22]。

由此建立的基座固定含铰间间隙二自由度机械臂模型,如图1所示。

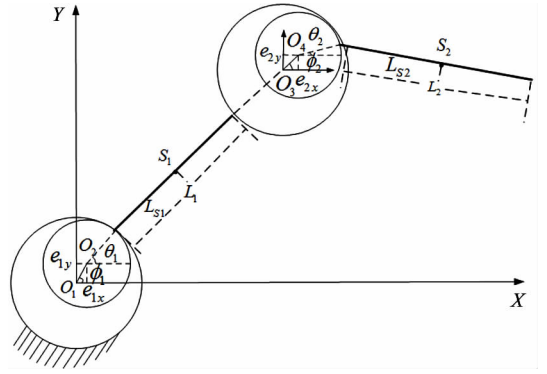


图1 基座固定含铰间间隙二自由度机械臂模型

图1中,连杆1和基座、连杆2和连杆1之间均以旋转铰链连接,为方便建立模型,对铰间间隙进行了放大。 S_1 和 S_2 分别为连杆1和连杆2的质心, O_1, O_2, O_3, O_4 分别为轴套1、轴颈1、轴套2、轴颈2的质心。以轴套质心为原点建立的坐标系, (e_{ix}, e_{iy}) 为轴颈中心相对于轴套中心的位置坐标, e_i 为间隙矢量,即偏心率, ϕ_i 为轴颈中心相对OX坐标轴的角度, δ_i 为穿刺深度, θ_i 为机械臂相对OX坐标轴的旋转角度。具体表达式为

$$e_i = \sqrt{e_{ix}^2 + e_{iy}^2} \quad (1)$$

$$\phi_i = \arctan \frac{e_{iy}}{e_{ix}} \quad (2)$$

$$\delta_i = e_i - r_i \quad (3)$$

式(3)中, r_i 为轴套与轴径半径之差。

轴套1固定在基座上,在轴套1的质心位置建立固定坐标系OXY。已知轴套1和轴颈1的半径分别为 R_1 和 R_2 ,轴套2和轴颈2的半径分别为 R_3 和 R_4 。连杆1和连杆2的臂长分别为 L_1 和 L_2 ,连杆1的质心到轴颈1质心的距离为 L_{s1} ,连杆2的质心到轴颈2质心的距离为 L_{s2} 。连杆1和连杆2的质量分别为 m_1 和 m_2 。假设作用在连杆1和连杆2上的驱

动力矩分别为 T_1 和 T_2 。

1.2 接触碰撞分析

由于铰间间隙的存在,轴径与轴套机械臂运动过程中必然会产生碰撞,碰撞力会导致机械臂末端轨迹产生误差,因此建立铰间间隙机械臂模型,需要对接触碰撞力进行分析。

(1) 碰撞接触判定

间隙铰轴径与轴套是否发生碰撞可通过 $\text{sign}(\delta_i)$ 进行判定:当 $\delta_i < 0$ 时,轴径与轴套没有产生接触,轴径在间隙内自由运动; $\delta_i = 0$ 时,接触但没有相互作用力; $\delta_i > 0$ 时,两者接触发生形变,产生作用力。

(2) 碰撞接触力分析

间隙铰受力示意图如图 2 所示,图中 F_{ni} 为法向接触力, F_{ti} 为切向摩擦力。设 F_{Ci} 为两者合力,则表达式为

$$F_{Ci} = \sqrt{F_{ni}^2 + F_{ti}^2} \tag{4}$$

F_{Cxi} 、 F_{Cyi} 分别表示 F_{Ci} 在 x 轴与 y 轴的分量。

碰撞力 F_{ni} 表达式为

$$F_{ni} = K_i \delta_i^m + C_{in} \dot{\delta}_i \tag{5}$$

式中, K_i 为第 i 个间隙铰刚度系数, C_{in} 为第 i 个间隙铰法向阻尼系数, m 为非线性弹簧接触力系数。

接触力 F_{ti} 表达式为

$$F_{ti} = -f_i F_{ni} \text{sign}(v_{ti}) \tag{6}$$

式中, f_i 为第 i 个间隙铰滑动摩擦因数, v_{ti} 为第 i 个间隙铰切向相对速度。

因此可得碰撞接触力表达式为

$$\begin{cases} F_{Cix} = \text{sign}(\delta_i) (F_{ni} \cos\phi_i + F_{ti} \sin\phi_i) \\ F_{Ciy} = \text{sign}(\delta_i) (F_{ni} \sin\phi_i - F_{ti} \cos\phi_i) \end{cases} \tag{7}$$

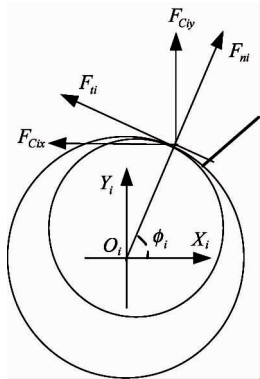


图 2 间隙铰受力示意图

1.3 含铰间间隙机械臂模型建立

由图 1 所定义各变量可知模型所建立的机械臂自由度为 6,分别为 $e_{1x}, e_{1y}, e_{2x}, e_{2y}, \theta_1, \theta_2$ 。

连杆 1 质心位置方程为

$$\begin{bmatrix} x_{s_1} \\ y_{s_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_{1x} \\ e_{1y} \end{bmatrix} + L_{s_1} \begin{bmatrix} \cos\theta_1 \\ \sin\theta_1 \end{bmatrix} \tag{8}$$

连杆 2 质心位置方程为

$$\begin{bmatrix} x_{s_2} \\ y_{s_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_{1x} \\ e_{1y} \end{bmatrix} + L_1 \begin{bmatrix} \cos\theta_1 \\ \sin\theta_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e_{2x} \\ e_{2y} \end{bmatrix} + L_{s_2} \begin{bmatrix} \cos\theta_2 \\ \sin\theta_2 \end{bmatrix} \tag{9}$$

对位置求时间二阶导数可以得到相应时刻的加速度方程。

连杆 1 质心加速度方程为

$$\begin{bmatrix} \ddot{x}_{s_1} \\ \ddot{y}_{s_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ddot{e}_{1x} \\ \ddot{e}_{1y} \end{bmatrix} - L_{s_1} \dot{\theta}_1^2 \begin{bmatrix} \cos\theta_1 \\ \sin\theta_1 \end{bmatrix} + L_{s_1} \ddot{\theta}_1 \begin{bmatrix} -\sin\theta_1 \\ \cos\theta_1 \end{bmatrix} \tag{10}$$

连杆 2 质心加速度方程为

$$\begin{bmatrix} \ddot{x}_{s_2} \\ \ddot{y}_{s_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ddot{e}_{1x} \\ \ddot{e}_{1y} \end{bmatrix} + L_1 \ddot{\theta}_1 \begin{bmatrix} -\cos\theta_1 \\ -\sin\theta_1 \end{bmatrix} + L_1 \dot{\theta}_1 \begin{bmatrix} -\sin\theta_1 \\ \cos\theta_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \ddot{e}_{2x} \\ \ddot{e}_{2y} \end{bmatrix} + L_{s_2} \ddot{\theta}_2 \begin{bmatrix} -\cos\theta_2 \\ -\sin\theta_2 \end{bmatrix} + L_{s_2} \dot{\theta}_2 \begin{bmatrix} -\sin\theta_2 \\ \cos\theta_2 \end{bmatrix} \tag{11}$$

在接触点轴颈相对于轴套的切向速度和法向速度为

$$\begin{cases} v_{2t} = -\dot{e}_{2x} \sin\phi_2 + \dot{e}_{2y} \cos\phi_2 + (\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1) R_4 - \dot{\theta}_1 e_2 \\ v_{1t} = -\dot{e}_{1x} \sin\phi_1 + \dot{e}_{1y} \cos\phi_1 + \dot{\theta}_1 R_2 \\ v_{in} = \dot{e}_{ix} \cos\phi_i + \dot{e}_{iy} \sin\phi_i, i = 1, 2 \end{cases} \tag{12}$$

对于连杆 1,根据 $\sum \mathbf{F} = m\mathbf{a}_{s_1}$ 可得

$$\begin{cases} -F_{C1x} + F_{C2x} = m_1 \ddot{x}_{s_1} \\ -F_{C1y} + F_{C2y} - m_1 g = m_1 \ddot{y}_{s_1} \end{cases} \tag{13}$$

由公式 $\boldsymbol{\tau} = {}^S \mathbf{J} \boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\omega} \times ({}^S \mathbf{J} \boldsymbol{\omega})$ 与式(13)可得

$$\begin{aligned} T_1 + F_{C1x} R_2 \sin\phi_1 - F_{C2x} [L_1 \sin\theta_1 + e_{2y} + R_4 \sin\phi_2] \\ - F_{C1y} R_2 \cos\phi_1 + F_{C2y} [L_1 \cos\theta_1 + e_{2x} + R_4 \cos\phi_2] \\ - m_1 g L_{s_1} \cos\theta_1 = J_{o_2} \ddot{\theta}_1 \end{aligned} \tag{14}$$

同理,对于连杆 2 可得方程

$$T_2 + F_{c2x}R_4 \sin\phi_2 - F_{c2y}R_4 \cos\phi_2 - m_2gL_{S_2} \cos\theta_2 = J_{O_4}\ddot{\theta}_2 \quad (15)$$

将方程整理成矩阵形式表示如下:

$$\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{H}^{-1}\mathbf{Q} \quad (16)$$

式中, $\ddot{\mathbf{q}}$ 为广义加速度矩阵, $\mathbf{H}$ 为广义质量矩阵, $\mathbf{Q}$ 为广义力矩阵。其中:

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -L_{S_1} \sin\theta_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & L_{S_1} \cos\theta_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & J_{O_2} & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -L_1 \sin\theta_1 & 1 & 0 & -L_{S_2} \sin\theta_2 \\ 0 & 1 & L_1 \cos\theta_1 & 0 & 1 & L_{S_2} \cos\theta_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & J_{O_4} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Q} = [a_1 \ a_2 \ a_3 \ a_4 \ a_5 \ a_6]^T$$

$$a_1 = \frac{-F_{c1x} + F_{c2x}}{m_1} + L_{S_1}\dot{\theta}_1^2 \cos\theta_1$$

$$a_2 = \frac{-F_{c1y} + F_{c2y}}{m_1} - g + L_{S_1}\dot{\theta}_1^2 \sin\theta_1$$

$$a_3 = T_1 + F_{c1x}R_2 \sin\phi_1 - F_{c1y}R_2 \cos\phi_1 - m_1gL_{S_1} \cos\theta_1 - F_{c2x}[L_1 \sin\theta_1 + e_{2y} + R_4 \sin\phi_2] + F_{c2y}[L_1 \cos\theta_1 + e_{2x} + R_4 \cos\phi_2]$$

$$a_4 = \frac{-F_{c2x}}{m_2} + L_1\dot{\theta}_1^2 \cos\theta_1 + L_{S_2}\dot{\theta}_2^2 \cos\theta_2$$

$$a_5 = \frac{-F_{c2y}}{m_2} - g + L_1\dot{\theta}_1^2 \sin\theta_1 + L_{S_2}\dot{\theta}_2^2 \sin\theta_2$$

$$a_6 = T_2 + F_{c2x}R_4 \sin\phi_2 - F_{c2y}R_4 \cos\phi_2 - m_2gL_{S_2} \cos\theta_2$$

2 控制器设计

空间机械臂系统动力学模型通常可以被描述成下式:

$$\mathbf{H}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{B}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{G}(\mathbf{q}) + \mathbf{F}(\dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{d}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \boldsymbol{\tau} \quad (17)$$

将其简化为

$$\mathbf{H}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{B}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{D} = \boldsymbol{\tau} \quad (18)$$

式中, $\mathbf{H}$ 为广义质量矩阵; $\mathbf{B}$ 为哥氏力与离心力矩阵; $\mathbf{D} = \mathbf{G}(\mathbf{q}) + \mathbf{F}(\dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{d}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ 为重力矢量、摩擦

力矢量、建模不确定干扰、外来扰动之和, 假定 $\mathbf{D}$ 有界; $\mathbf{q}$ 为机械臂关节角度矢量; $\boldsymbol{\tau}$ 为实际驱动力矩。

定义轨迹跟踪误差矢量如下:

$$\begin{cases} \mathbf{e} = \mathbf{q}_d - \mathbf{q} \\ \dot{\mathbf{e}} = \dot{\mathbf{q}}_d - \dot{\mathbf{q}} \\ \ddot{\mathbf{e}} = \ddot{\mathbf{q}}_d - \ddot{\mathbf{q}} \end{cases} \quad (19)$$

式中 $\mathbf{q}_d$ 、 $\dot{\mathbf{q}}_d$ 、 $\ddot{\mathbf{q}}_d$ 为期望的位置、速度、加速度矩阵, 并假设 $\mathbf{e}$ 、 $\dot{\mathbf{e}}$ 、 $\ddot{\mathbf{e}}$ 均有界。

因此由式(18)与(19)可得

$$\mathbf{H}\ddot{\mathbf{e}} + \mathbf{B}\dot{\mathbf{e}} = \boldsymbol{\tau}_d - \boldsymbol{\tau} \quad (20)$$

式中 $\boldsymbol{\tau}_d = \mathbf{H}\ddot{\mathbf{q}}_d + \mathbf{B}\dot{\mathbf{q}}_d + \mathbf{D}$ 为期望力矩。若期望轨迹的各阶导数均有界, 则有

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\tau}_d &\leq \|\mathbf{H}\ddot{\mathbf{q}}_d + \mathbf{B}\dot{\mathbf{q}}_d + \mathbf{D}\| \\ &\leq \|\mathbf{H}\ddot{\mathbf{q}}_d + \mathbf{B}\dot{\mathbf{q}}_d\| + \|\mathbf{D}\| = \bar{\boldsymbol{\tau}}_d \end{aligned} \quad (21)$$

式中, $\bar{\boldsymbol{\tau}}_d$ 为期望控制力矩 $\boldsymbol{\tau}_d$ 的上界。

设计分数阶 PD 滑模控制器如下:

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{K}_p \mathbf{e} + \mathbf{K}_d \mathbf{D}^\alpha \mathbf{e} + \mathbf{K}_s \text{sign}(\dot{\mathbf{e}} + \boldsymbol{\lambda} \mathbf{e}) \quad (22)$$

式中, $\mathbf{K}_p$ 与 $\mathbf{K}_d$ 分别为分数阶 PD 的增益矩阵; $\mathbf{D}^\alpha$ 为分数阶 Caputo 算子, 表示 α 阶次微分; $\mathbf{K}_s$ 为滑模增益矩阵; $\boldsymbol{\lambda}$ 为滑模面倾斜常量矩阵; $\text{sign}(\cdot)$ 为符号函数。

由式(22)可以看出, 控制器是由分数阶 PD 部分和滑模部分组成, 分数阶 PD 部分代替了通常的滑模等效控制律部分。因此并不需要系统的精确模型信息即可实施控制。

将式(22)代入式(20)可得闭环系统方程如下所示:

$$\mathbf{H}\ddot{\mathbf{e}} + \mathbf{B}\dot{\mathbf{e}} + \mathbf{K}_p \mathbf{e} + \mathbf{K}_d \mathbf{D}^\alpha \mathbf{e} = \boldsymbol{\tau}_d - \mathbf{K}_s \text{sign}(\dot{\mathbf{e}} + \boldsymbol{\lambda} \mathbf{e}) \quad (23)$$

为了保证 PD^μ-SMC 控制器全局渐进稳定性, 选择参数如下:

$$\begin{cases} \lambda > 0 \\ \mathbf{K}_s \geq \bar{\boldsymbol{\tau}}_d > 0 \\ \lambda_m(\mathbf{B} + \mathbf{K}_d) > \lambda \cdot \lambda_M(\mathbf{H}) \\ \lambda_m(\mathbf{K}_p) > \lambda^2 \cdot \lambda_M(\mathbf{H}) \end{cases} \quad (24)$$

式中, $\lambda_m(\cdot)$ 与 $\lambda_M(\cdot)$ 分别代表矩阵最大与最小特征值。 $\mathbf{K}_p$ 、 $\mathbf{K}_d$ 分别选定为正定矩阵。

3 控制器稳定性证明

3.1 预备定理

标记 1:为了方便书写,约定标记 $\mathbf{H} > 0$ 表示矩阵 $\mathbf{H}$ 为正定矩阵,同理若矩阵 $\mathbf{M} - \mathbf{N}$ 为正定矩阵,表示为 $\mathbf{M} - \mathbf{N} > 0$ 。

假设:存在矩阵 $\mathbf{P}$,使得 $\mathbf{K}_d - \mathbf{P} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \end{bmatrix}$ 成

立,其中 ε_i 为无穷小正常量,则 $\mathbf{K}_d - \mathbf{P} > 0$ 。且 $\mathbf{P}$ 满足 $\mathbf{P} + \mathbf{B} > 0$ 条件。

引理 1:针对对称矩阵 $\mathbf{X}$

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B}^T & \mathbf{C} \end{bmatrix} \quad (25)$$

矩阵 $\mathbf{X}$ 中 $\mathbf{A}$ 阵的 Schur 补为^[23]

$$\mathbf{S} = \mathbf{C} - \mathbf{B}^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} \quad (26)$$

若 $\mathbf{A} > 0, \mathbf{S} > 0$, 则 $\mathbf{X} > 0$ 。

引理 2:Caputo 分数阶微积分定义如下:

$$D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_0^t \frac{f^{(m)}(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha-m+1}} d\tau \quad (27)$$

在 $\alpha \in (0, 1)$ 时,有^[24]

$$\begin{cases} \text{sign}(D^\alpha f) = \text{sign}(f) \\ \text{sign}(D^{\alpha-1} f) = \text{sign}(f) \end{cases} \quad (28)$$

引理 2 推论:由于误差各阶导数均有界,因此必有大于 1 的正常数 $\bar{k}_1$ 与 $\bar{k}_2$ 使得

$$\begin{cases} \bar{k}_1 e > \overline{D^\alpha e} \\ \bar{k}_2 e > \overline{D^{\alpha-1} e} \end{cases} \quad (29)$$

式中 $\overline{D^\alpha e}, \overline{D^{\alpha-1} e}$ 分别表示分数阶微积分上界。

引理 3:机器人系统惯性矩阵 $\mathbf{H}$ 对称正定且有界。

定理 1:针对式(22) 所描述系统,矩阵

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_p & \lambda \mathbf{H} \\ \lambda \mathbf{H} & \mathbf{H} \end{bmatrix} \quad (30)$$

正定。

定理 1 证明如下:

选取 $\mathbf{K}_p$ 为正定矩阵,且矩阵 $\mathbf{H} > 0$,由条件式(23) 中 $\lambda_m(\mathbf{K}_p) > \lambda^2 \cdot \lambda_M(\mathbf{H})$ 可得

$$\mathbf{K}_p - \lambda^2 \mathbf{H} > 0 \quad (31)$$

由正定矩阵的逆矩阵特性可得

$$\mathbf{H}^{-1} - \lambda^2 \mathbf{K}_p^{-1} > 0 \quad (32)$$

由正定矩阵特性可知,若 $\mathbf{M} > 0, \mathbf{N} > 0$, 则矩阵 $\mathbf{M}\mathbf{N}\mathbf{M} > 0$,因此式(31) 两侧同乘矩阵 $\mathbf{H}$ 可得

$$\mathbf{H} - \lambda^2 \mathbf{H} \mathbf{K}_p^{-1} \mathbf{H} > 0 \quad (33)$$

惯性矩阵 $\mathbf{H} = \mathbf{H}^T$,因此可得

$$\mathbf{S} = \mathbf{H} - (\lambda \mathbf{H})^T \mathbf{K}_p^{-1} (\lambda \mathbf{H}) > 0 \quad (34)$$

得证。

3.2 稳定性证明

选取 Lyapunov 函数为

$$\begin{aligned} V = & \frac{1}{2} (\mathbf{e}^T \dot{\mathbf{e}}^T) \mathbf{Q} \begin{pmatrix} \mathbf{e} \\ \dot{\mathbf{e}} \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \lambda \mathbf{e}^T (\mathbf{B} + \mathbf{P}) \mathbf{e} \\ & + \frac{1}{2} \frac{\lambda}{k_1 \cdot k_2} D^{\alpha-1} \mathbf{e}^T (\mathbf{K}_d - \mathbf{P}) D^{\alpha-1} \mathbf{e} \end{aligned} \quad (35)$$

对其求导可得

$$\begin{aligned} \dot{V} = & (\dot{\mathbf{e}}^T \ddot{\mathbf{e}}^T) \mathbf{Q} \begin{pmatrix} \mathbf{e} \\ \dot{\mathbf{e}} \end{pmatrix} + \lambda \dot{\mathbf{e}}^T (\mathbf{B} + \mathbf{P}) \mathbf{e} \\ & + \frac{\lambda}{k_1 \cdot k_2} D^\alpha \mathbf{e}^T (\mathbf{K}_d - \mathbf{P}) D^{\alpha-1} \mathbf{e} \\ \leq & (\dot{\mathbf{e}}^T \ddot{\mathbf{e}}^T) \mathbf{Q} \begin{pmatrix} \mathbf{e} \\ \dot{\mathbf{e}} \end{pmatrix} + \lambda \dot{\mathbf{e}}^T (\mathbf{B} + \mathbf{P}) \mathbf{e} \\ = & \dot{\mathbf{e}}^T \mathbf{K}_p \mathbf{e} + (\lambda \mathbf{e} + \dot{\mathbf{e}}) \mathbf{H} \ddot{\mathbf{e}} + \lambda \dot{\mathbf{e}}^T (\mathbf{B} + \mathbf{K}_d) \mathbf{e} \\ & + \lambda \mathbf{e} \mathbf{H} \dot{\mathbf{e}} + \lambda \dot{\mathbf{e}}^T (\mathbf{K}_d - \mathbf{P}) \mathbf{e} \end{aligned} \quad (36)$$

将式(23) 代入式(36) 可得

$$\begin{aligned} \dot{V} \leq & \dot{\mathbf{e}}^T \mathbf{K}_p \mathbf{e} + (\lambda \mathbf{e} + \dot{\mathbf{e}}) (\tau_b - \mathbf{K}_s \text{sign}(\lambda \mathbf{e} + \dot{\mathbf{e}})) \\ & - (\lambda \mathbf{e} + \dot{\mathbf{e}}) \mathbf{B} \dot{\mathbf{e}} - (\lambda \mathbf{e} + \dot{\mathbf{e}}) \mathbf{K}_p \mathbf{e} \\ & - (\lambda \mathbf{e} + \dot{\mathbf{e}}) \mathbf{K}_d D^\alpha \mathbf{e} + \lambda \dot{\mathbf{e}}^T (\mathbf{B} + \mathbf{K}_d) \mathbf{e} \\ = & - \lambda \mathbf{e}^T \mathbf{K}_p \mathbf{e} + (\lambda \mathbf{e} + \dot{\mathbf{e}}) (\tau_b - \text{sign} \mathbf{K}_s (\lambda \mathbf{e} + \dot{\mathbf{e}})) \\ & - \lambda \dot{\mathbf{e}}^T (\mathbf{B} + \bar{k}_1 \mathbf{K}_d - \mathbf{H}) \dot{\mathbf{e}} \end{aligned} \quad (37)$$

由 $\mathbf{K}_p > 0$ 可知

$$\lambda \mathbf{e}^T \mathbf{K}_p \mathbf{e} > 0$$

由条件式(24) 中 $\lambda_m(\mathbf{B} + \mathbf{K}_d) > \lambda \cdot \lambda_M(\mathbf{H})$ 可得

$$\mathbf{B} + \bar{k}_1 \mathbf{K}_d - \mathbf{H} > 0$$

针对条件式(24) 中 $\mathbf{K}_s \geq \bar{\tau}_d > 0$ 可得

$$\begin{aligned} (\lambda \mathbf{e} + \dot{\mathbf{e}}) \mathbf{K}_s \text{sign}(\lambda \mathbf{e} + \dot{\mathbf{e}}) &= |\lambda \mathbf{e} + \dot{\mathbf{e}}| \mathbf{K}_s \\ &\geq |\lambda \mathbf{e} + \dot{\mathbf{e}}| \bar{\tau}_d \\ &\geq (\lambda \mathbf{e} + \dot{\mathbf{e}}) \tau_b \end{aligned}$$

因此 $\dot{V}$ 为负定。

考虑到滑模趋近律直接使用符号函数 $\text{sign}(\cdot)$ 可能引起抖振,因此选择幂次趋近律为

$$\dot{s} = -K_s \left| \frac{s}{\gamma} \right|^\sigma \text{sign}\left(\frac{s}{\gamma}\right) \quad (38)$$

式中, $\gamma > 0$ 为滑模切换层厚度放缩参数, $0 < \sigma < 1$ 为幂次趋近律幂次。

令 $V = \frac{1}{2}s^2$, 则

$$\begin{aligned} \dot{V} = s\dot{s} &= -K_s s \left| \frac{s}{\gamma} \right|^\sigma \text{sign}\left(\frac{s}{\gamma}\right) \\ &= -K_s \gamma \left| \frac{s}{\gamma} \right| \text{sign}(s) \left| \frac{s}{\gamma} \right|^\sigma \text{sign}\left(\frac{s}{\gamma}\right) \\ &= -K_s \gamma \left| \frac{s}{\gamma} \right|^{\sigma+1} < 0 \end{aligned}$$

上述结果证明在滑模面邻域内, 运动轨迹将以有限时间内到达滑模面, 即满足局部到达条件。因此更换趋近律之后仍然可以保证系统的渐进稳定性。

4 仿真研究

为了验证控制器的有效性, 本文在 Matlab 中对不同重力条件下的含间隙铰空间二自由度机械臂模型进行了仿真。模型参数如下:

$L_1 = L_2 = 1\text{m}$; $L_{s1} = L_{s2} = 0.5\text{m}$; $R_1 = R_3 = 0.006\text{m}$; $R_2 = R_4 = 0.005\text{m}$; $m_1 = m_2 = 1.09\text{kg}$; $J_{o2} = J_{o4} = 0.25\text{kg} \cdot \text{m}^2$; 非线性弹簧接触力系数 $h = 1.5$; 滑动摩擦因数 $f_i = 0.05$; 法向阻尼系数 $C_{in} = 175\text{N} \cdot \text{s/m}$; 刚度系数 $K_i = 1 \times 10^6\text{N} \cdot \text{m}$ 。

系统给定初始位置为 $(0.000001, 0.000001, -0.6, 0.000001, 0.000001, 1.4)$, 期望轨迹为

$$\begin{cases} x_d = 0.28 \cos\left(\frac{\pi t}{5}\right) + 0.8 \\ y_d = 0.28 \sin\left(\frac{\pi t}{5}\right) + 0.38 \end{cases} \quad (39)$$

所设计 PD^μ-SMC 控制器, 与同样不需要被控对象模型信息的自抗扰控制器^[19]及 PID 控制器进行了对比。为了证明控制器的抗扰能力, 在 2s ~ 4s 添加了幅值较大且短时变化剧烈的随机干扰量作为外部干扰, 如图 3 所示。

4.1 空间微重力情况

机械臂在空间运行时, 处于微重力情况, 仿真中将重力加速度设为 $g = 1 \times 10^{-6}\text{m/s}^2$ 模拟空间情

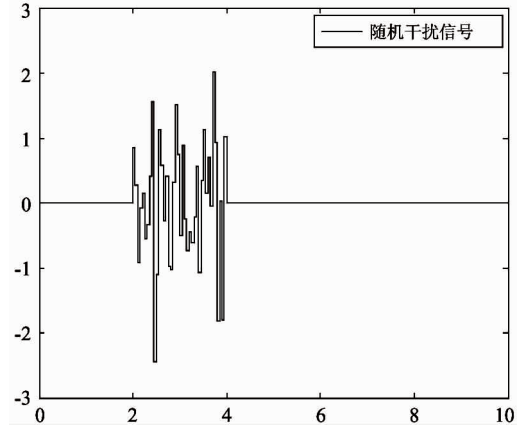


图3 外部随机干扰信号

况。仿真结果如图 4 ~ 图 8 所示。其中图 4 为 PID 控制器控制下的机械臂末端轨迹曲线, 图 5 为自抗扰控制器 (active disturbance rejection controller, ADRC) 末端轨迹曲线, 图 6 为 PD^μ-SMC 控制器末端轨迹曲线, 图 7、图 8 为三种控制器的关节 1 与关节 2 关节角度跟踪误差。

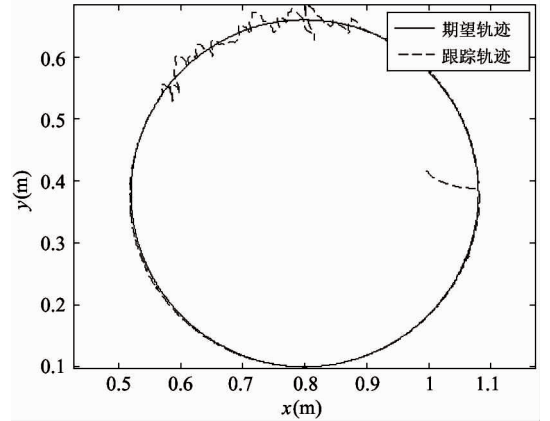


图4 PID 控制器末端轨迹跟踪

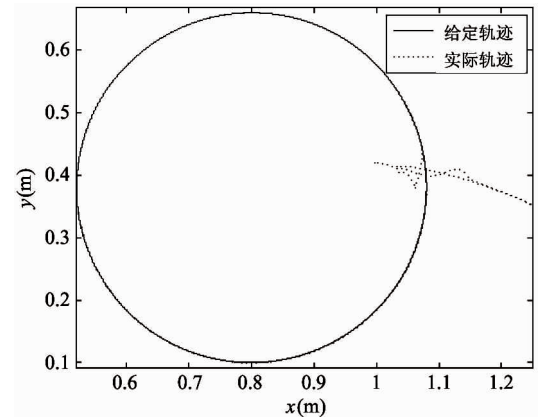


图5 ADRC 控制器末端轨迹跟踪

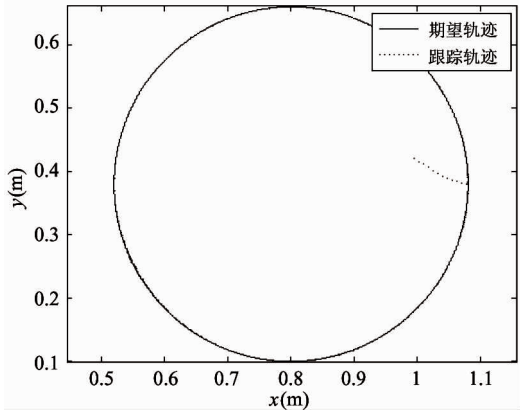


图 6 PD^μ-SMC 控制器末端轨迹跟踪

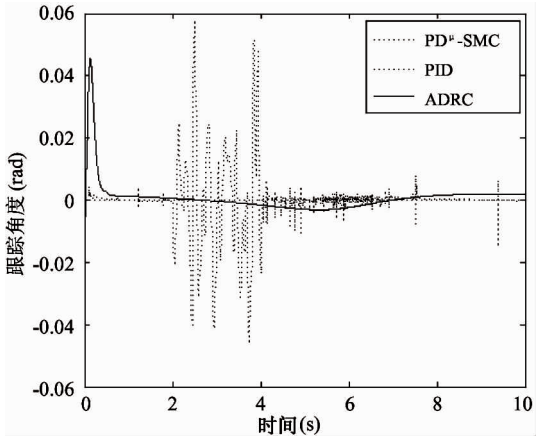


图 7 关节 1 角度跟踪误差

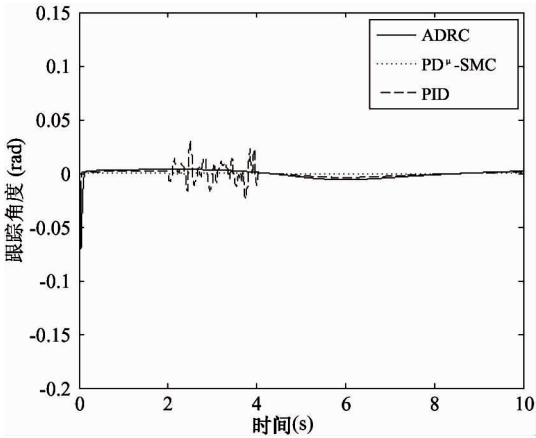


图 8 关节 2 角度跟踪误差

从图 4 ~ 图 6 对比可以看出,在存在干扰的情况下 ADRC 控制器与 PD^μ-SMC 控制器鲁棒性明显优于 PID 控制器。而相对于 ADRC 控制器需要规划过渡过程而言,分数阶控制又起始点到达期望轨迹的过程振动更小,所需时间更短。由图 7 和图 8

中可以看出,PD^μ-SMC 控制器角度跟踪误差优于 ADRC 控制器和 PID 控制器。

4.2 地面装调重力情况

控制器参数不做改变,在地面装调环境下重力加速度为 $g = 9.8\text{m/s}^2$,仿真如图 9 ~ 图 13 所示。

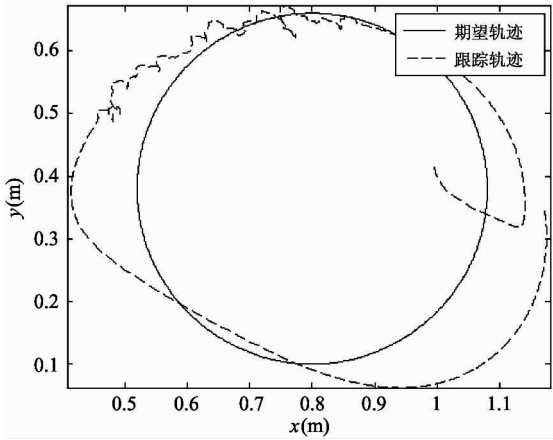


图 9 PID 控制器末端轨迹跟踪

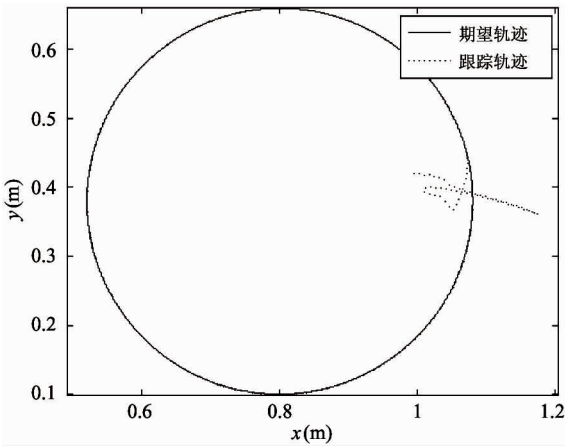


图 10 ADRC 控制器末端轨迹跟踪

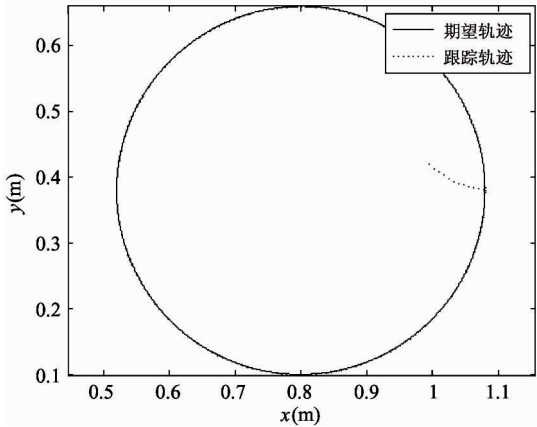


图 11 PD^μ-SMC 控制器末端轨迹跟踪

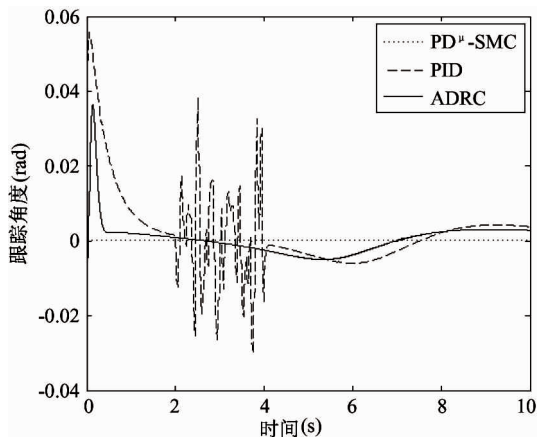


图 12 关节 1 角度跟踪误差

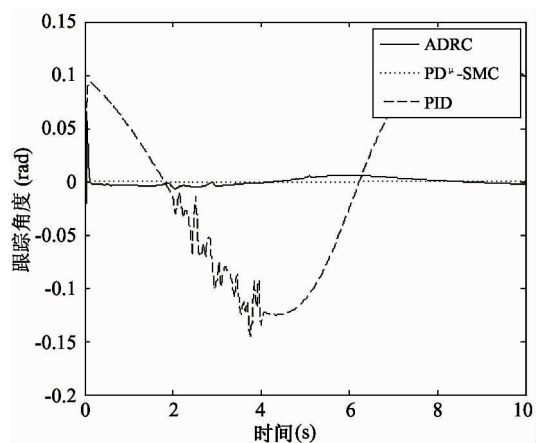


图 13 关节 2 角度跟踪误差

由图 9 ~ 图 11 可以看出,不添加重力补偿项的 PID 控制器并不能满足在地面与空间均能跟踪末端轨迹的要求,重力补偿项则需要提前预知模型信息。ADRC 控制器与 PD^μ-SMC 控制器则可以在不同重力环境下对轨迹进行良好的跟踪。图 12 给出的关节 1 角度跟踪误差中,PD^μ-SMC 控制器误差相较于 ADRC 与 PID 控制器误差小一个数量级。图 13 给出的对于关节 2 角度跟踪,PD^μ-SMC 相对于 ADRC 控制器误差残留更小,PID 控制器误差很大。

5 结 论

针对不同重力环境下含铰间间隙空间机械臂轨迹跟踪问题,本文设计了一种 PD^μ-SMC 控制器,该控制器采用分数阶 PD 控制器与滑模控制器相结合。分数阶 PD(PD^μ)控制器保证名义模型全局渐

进稳定性,滑模控制器(SMC)保证系统鲁棒性,补偿被控系统的建模不确定性与外部干扰。

通过仿真,对于含铰间间隙空间机械臂而言,相比 PID 控制器,PD^μ-SMC 控制器在地面装调和空间应用环境都可以快速有效地跟踪期望轨迹。而与 ADRC 控制器相比较,PD^μ-SMC 控制器控制速度更快,轨迹跟踪误差更小,超调更小,同时对于外部扰动, also 具有很强的鲁棒性。充分说明了 PD^μ-SMC 控制器的良好性能。

参考文献

- [1] 陈小前. 航天器在轨服务技术. 北京: 中国宇航出版社, 2009
- [2] Huang H Z, Li J L, Yang Y Q, et al. Dynamics modeling and simulation of deployable mechanism with double clearance. *Key Engineering Materials*, 2016, 693: 452-457
- [3] 潘冬, 王兴贵, 赵阳. 运动副间隙对卫星天线双轴机构动态特性影响. *中国空间科学技术*, 2012, 32(5): 21-26
- [4] 阎绍泽. 航天器中含间隙机构非线性动力学问题及其研究进展. *动力学与控制学报*, 2004, 2(2): 48-52
- [5] 王文魁. 空间机构运动行为模拟概念研究. *载人航天*, 2013, 19(5): 59-66
- [6] 阎绍泽, 陈鹿民, 季林红等. 含间隙铰的机械多体系统动力学模型. *振动工程学报*, 2003, 16(3): 290-294
- [7] Obara S, Sato M. Numerical investigation of influence of gravity on the performance of ball bearings assembled in a space device. In: *Proceedings of the 2nd World Tribology Congress*, Vienna, Austria, 2001. 1-4
- [8] 戴振东. 空间机器人的若干前沿领域: 研究进展和关键技术. *载人航天*, 2016, 22(1): 9-15
- [9] Huang P, Wang M, Meng Z, et al. Attitude takeover control for post-capture of target spacecraft using space robot. *Aerospace Science & Technology*, 2016, 51: 171-180
- [10] 王锋, 陈凯, 陈小平. 一种含间隙机械臂的在线校准方法. *机器人*, 2013, 35(5): 521-526
- [11] Yang Z, Zheng F B. Dynamics analysis of space robot manipulator with joint clearance. *Acta Astronautica*, 2011, 68(7-8): 1147-1155
- [12] 孙东阳, 陈国平, 王铁成. 谐波齿轮传动的含间隙机构的动力学分析. *振动与冲击*, 2014, 33(23): 160-

- 164
- [13] 刘志全, 危清清, 王耀兵. 空间机械臂关节精细动力学模型的建立及关节力矩控制. 宇航学报, 2014, 35(6): 663-668
- [14] 刘福才, 贾亚飞, 刘爽爽. 气动加载系统的积分型线性自抗扰控制器. 控制理论与应用, 2015, 32(8): 1090-1097
- [15] 刘福才, 高娟娟, 王跃灵. 重力对空间机械臂运动控制的影响. 高技术通讯, 2012, 22(9): 944-950
- [16] 刘福才, 侯甜甜, 秦利等. 不同重力环境下间隙对机械臂末端轨迹的影响. 高技术通讯, 2014, 24(10): 1044-1052
- [17] Crawley E F, Barlow M S, van Schoor M C, et al. Measurement of the modal parameters of a space structure in zero gravity. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 1995, 18(3): 385-394
- [18] Matsunaga S. Micro-gravity experiments of space robotics and space-used mechanisms at tokyo institute of technology. *Journal of The Japan Society of Microgravity Application*, 2002, 19: 101-105
- [19] 刘福才, 侯甜甜, 秦利等. 考虑铰间间隙和重力影响的空间机械臂轨迹跟踪控制. 控制理论与应用, 2015, 32(5): 665-673
- [20] Shi Z, Huang X X, Tan Q, et al. Fractional order PID control for teleoperation of a free-flying space robot. *Control Theory & Applications*, 2016, 33(6): 800-808
- [21] Ilam S, Liu X P. Robust sliding mode control for robot manipulators. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 2011, 58(6): 2444-2453
- [22] Flores P, Ambrósio J, Claro J C P, et al. A study on dynamics of mechanical systems including joints with clearance and lubrication. *Mechanism and Machine Theory*, 2006, 41(3): 247-261
- [23] Boyd S, Vandenberghe L. *Convex Optimization*. Cambridge: Cambridge University Press, 2004
- [24] 邓立为. 分数阶滑模控制理论及其应用研究:[博士学位论文]. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学控制理论与制导技术研究中心, 2014

PD^μ-SMC trajectory tracking control of space manipulators with joint clearance under different gravity conditions

Liu Fucui^{*}, Xia Wei^{*}, Qin Li^{*}, Hou Tiantian^{***}, Guo Yu^{*}

(^{*} Key Laboratory of Industrial Computer Control Engineering of Hebei Province, Yanshan University, Qinhuangdao 066004)

(^{**} Haibin College Electronic Information and Control Engineering, Beijing Jiaotong University, Cangzhou 061100)

Abstract

The influence of gravity on the trajectory tracking control of a space manipulator with joint clearance was studied. Considering that the assembly and debugging of a manipulator is conducted under the ground gravity, while in space application it is influenced by the micro-gravity, so a manipulator well designed, assembled and debugged on the ground fails to achieve the expected control precision and effect in its space application, the study designed a fractional order PD sliding mode controller (PD^μ-SMC) without a need of controlled subject model for control of a space manipulator with joint clearance. Based on the Lyapunov theory, the asymptotic stability of the closed-loop system was proved. The simulation results show that the control strategy can effectively suppress the external disturbance and successfully realize the fast and accurate tracking of the expected trajectory toward the space manipulator with joint clearance under different gravity conditions and external disturbance.

Key words: space robot arm, different gravity conditions, joint clearance, fractional order, sliding mode control (SMC)