

二阶非线性不确定系统分段非奇异快速终端滑模控制^①

张贝贝^② 高守礼 赵东亚^③

(中国石油大学(华东)化学工程学院 青岛 266580)

摘 要 研究了非线性不确定系统的滑模控制。针对传统非奇异快速终端滑模(NFTSM)在平衡点附近收敛速度慢的问题,提出了一种分段非奇异快速终端滑模(PWNFTSM),该滑模通过引入快速终端滑模非线性项,可实现系统有限时间收敛并在平衡点附近的局部区域保持快速收敛,避免了奇异现象,获得了比传统非奇异快速终端滑模更快的收敛速率。在此基础上,针对二阶非线性不确定系统,设计了一种基于径向基函数(RBF)神经网络干扰观测器(RBFNDO)的分段非奇异快速终端滑模控制算法。干扰观测器可准确估计系统不确定性和外界干扰,并对系统输入进行补偿,从而较大程度地提高了控制精度,改善了系统鲁棒性。运用 Lyapunov 方法证明了控制系统的闭环稳定性。仿真结果表明,该方法能大大加快系统的收敛速率,提高系统控制精度,改善系统的动态性能。

关键词 分段非奇异快速终端滑模(PWNFTSM),径向基函数(RBF)神经网络干扰观测器(RBFNDO),二阶非线性不确定系统,鲁棒性

0 引言

滑模控制(sliding mode control, SMC)作为变结构控制的一个重要分支,因其良好的瞬态性能、快速响应特性以及对参数摄动不变性引起了人们的广泛关注^[1-3]。目前,滑模控制已经在机器人控制、航空航天控制、化工过程控制等多种非线性控制领域取得了较为广泛的应用^[4-6]。一般而言,滑模控制在系统运动过程中分为两个阶段:趋近阶段和滑动阶段^[7]。趋近阶段由可达条件决定,可以保证系统在有限时间内从空间任意一点出发收敛到滑模面^[8]。滑模控制的优越鲁棒性主要体现在滑动阶段,而在趋近阶段系统对匹配不确定性和外界干扰仍然十分敏感。因此,改善滑模控制在趋近阶段的鲁棒性具有十分重要的实际意义。传统的解决方法是通过设计滑模趋近律来改善系统在趋近阶段的鲁棒性能。高为炳^[9,10]提出了等速趋近律、指数趋近律和幂次

趋近律以改善系统在趋近阶段的鲁棒性能并保证有限时间收敛到滑模面。但等速趋近律收敛速率较慢,且控制输入不连续;指数趋近律收敛速率较快,但是在接近滑模面时存在抖振,不利于改善系统动态性能;幂次趋近律可以使系统在滑模面附近收敛速率放缓,有利于消除抖振,但是在远离滑模面时收敛速率较小,运动时间较长。文献[11]根据指数趋近律和幂次趋近律设计了一种快速幂次趋近律,克服了传统幂次趋近律的缺陷。文献[12]通过两个幂次趋近律的线性组合设计了一种双幂次趋近律,获得了比快速幂次趋近律更快的收敛速率和更好的鲁棒性能。为获得较好的动态性能,本研究运用文献[12]给出的双幂次趋近律,设计了一种连续分段非奇异快速终端滑模控制算法。

1 相关工作

滑模控制在趋近阶段满足可达条件时,系统会

① 国家自然科学基金(61473312)资助项目。

② 男,1991年生,硕士;研究方向:滑模控制,机器人控制;E-mail: lulu163163@163.com

③ 通信作者,E-mail: dyzhao@upc.edu.cn
(收稿日期:2017-05-17)

在有限时间内到达滑模面进入滑动阶段。在滑动阶段,系统状态会沿着滑模面收敛到平衡点,而系统在滑模面上的运动性能主要依靠设计的滑模结构给予保证。传统的滑模是一种线性滑模,能够实现系统渐进稳定。当需要较大的收敛速率时,必须增大控制增益从而会引起输入饱和现象,不利于系统性能改善。为了克服线性滑模渐进稳定的问题,文献[13]提出了一种终端滑模(terminal sliding mode, TSM)设计,实现系统有限时间收敛,鲁棒性更好^[14,15]。但 TSM 控制存在两个问题:一是系统在平衡点处存在奇异现象,二是系统在远离滑模面时收敛速率较慢^[16]。针对第一个问题,文献[17]提出一种非奇异终端滑模(nonsingular terminal sliding mode, NTSM)控制算法,克服了奇异问题。为了提高系统在远离平衡点时的收敛速率,文献[18]提出了一种快速终端滑模(fast terminal sliding mode, FTSM)控制方法,但奇异问题仍然存在。综合以上两种控制方法的优点,文献^[18]设计了一种非奇异快速终端滑模(nonsingular fast terminal sliding mode, NFTSM)控制算法,然而,与 FTSM 控制算法相比, NFTSM 在平衡点附近收敛较慢。因此,为了进一步改善 NFTSM 的收敛性能,本文通过在 NFTSM 中引入 FTSM 非线性项,设计了一种分段非奇异快速终端滑模,使其在平衡点附近的局部区域实现快速收敛,改善了系统动态性能。

对非线性系统而言,以系统不确定性和外界干扰为代表的集总参数不确定性是影响系统控制精度的一个重要因素。对非线性系统连续滑模控制,集总参数不确定性的存在会使系统状态只能在有限时间内收敛到一个剩余集。为了改善系统的控制精度,干扰观测器逐渐发展起来,通过准确估计集总参数不确定性来补偿系统输入,从而大大提高系统的控制精度。文献[19]提出了一种非线性干扰观测器,干扰估计误差渐进收敛到 0,从而准确估计系统的集总参数不确定性。文献[20]通过引入模糊干扰观测器,通过鲁棒自适应退步算法实现不确定混沌系统的同步控制。文献[21]设计了一种自适应终端滑模干扰观测器,实现系统有限时间精确估计集总参数不确定性,实现了近空间飞行器的高精度

控制。文献[22]设计了一种新的基于神经网络的终端滑模控制算法,通过径向基函数(radial basis function, RBF)神经网络干扰观测器(RBF network disturbance observer, RBFNDO)可以无限逼近任意连续非线性有界干扰,取得了较好的控制效果。本研究的控制器设计采用了 RBFNDO 方法,获取了较好的控制效果。

针对二阶非线性不确定系统,本研究的主要工作是

(1) 设计了一种分段非奇异快速终端滑模(PWNFTSM),通过引入快速终端滑模(FTSM)中的非线性项,实现了比传统非奇异快速终端滑模(NFTSM)更快的收敛速率,改善了系统在滑动阶段的动态性能。

(2) 结合文献[12]提出的双幂次趋近律和文献[22]设计的 RBFNDO,提出了一种基于 RBF 神经网络干扰观测器(RBFNDO)的二阶非线性不确定系统分段非奇异快速终端滑模控制算法,与传统基于双幂次趋近律的 FTSM 控制算法相比,大大提高了系统的控制精度,改善了系统的控制性能。

2 问题描述

二阶非线性不确定系统表示如下:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = f_w(\mathbf{x}) + g_w(\mathbf{x})u + d(t) \end{cases} \quad (1)$$

其中 $f_w(\mathbf{x})$ 和 $g_w(\mathbf{x})$ 为未知连续函数, $d(t)$ 表示外界干扰,且满足 $|d(t)| \leq d, d \in R_+$ 。

考虑系统不确定性, $f_w(\mathbf{x})$ 和 $g_w(\mathbf{x})$ 可以分解为

$$\begin{cases} f_w(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) + \Delta f(\mathbf{x}) \\ g_w(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x}) + \Delta g(\mathbf{x}) \end{cases} \quad (2)$$

令 $\rho(t, \mathbf{x}, u) = \Delta f(\mathbf{x}) + \Delta g(\mathbf{x})u + d(t)$ 代表集总参数不确定性,那么系统(1)可以重新定义为

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x})u + \rho(t, \mathbf{x}, u) \end{cases} \quad (3)$$

其中 $f(\mathbf{x})$ 和 $g(\mathbf{x})$ 为连续已知函数,且满足 $g(\mathbf{x}) \neq 0$ 。

假设 1: 假设集总参数不确定性 $\rho(t, \mathbf{x}, u)$ 有界,即存在一个未知常数 $\bar{\rho} \in R_+$, 满足 $|\rho(t, \mathbf{x}, u)|$

$\leq \bar{\rho}$ 。

经典的 FTSM 滑模面和 NFTSM 滑模面设计如下所示:

$$\begin{aligned} s_{\text{FTSM}} &= x_2 + \lambda_1 |x_1|^{\gamma} \text{sign}(x_1) + \lambda |x_1|^{\gamma_1} \text{sign}(x_1) \\ &= 0 \end{aligned} \quad (4a)$$

$$\begin{aligned} s_{\text{NFTSM}} &= x_1 + \lambda_1 |x_1|^{\gamma} \text{sign}(x_1) + \frac{1}{\lambda} |x_2|^{\gamma_2} \text{sign}(x_2) \\ &= 0 \end{aligned} \quad (4b)$$

其中, $\lambda_1, \lambda \in R_+, \gamma_1 = 1/\gamma_2 = q/p \in (0.5, 1), q$ 和 p 均为正奇数, $\gamma > \gamma_2$ 。

由系统式(3), 根据滑模面式(4a)和(4b)可得 FTSM 和 NFTSM 控制律:

$$\begin{aligned} u_{\text{FTSM}} &= -\frac{1}{g(\mathbf{x})} [\lambda_1 \gamma |x_1|^{\gamma-1} x_2 + \lambda \gamma_1 |x_1|^{\gamma_1-1} x_2 \\ &\quad + f(\mathbf{x}) + \eta \text{sign}(s)] \end{aligned} \quad (5a)$$

$$\begin{aligned} u_{\text{NFTSM}} &= -\frac{1}{g(\mathbf{x})} \left[\frac{\lambda}{\gamma_2} (1 + \lambda_1 \gamma |x_1|^{\gamma-1}) \right. \\ &\quad \left. |x_2|^{2-\gamma_2} \text{sign}(x_2) + f(\mathbf{x}) + \eta \text{sign}(s) \right] \end{aligned} \quad (5b)$$

根据文献[18], 因为 $\gamma_1 \in (0.5, 1)$, 在控制律式(5a)中存在负指数幂 $\lambda \gamma_1 |x_1|^{\gamma_1-1} x_2$, 所以在平衡点 $x_1 = 0$ 处, 存在奇异现象。因为 $\gamma_2 \in (1, 2)$, 控制律对式(5b)中不存在负指数幂, 所以奇异现象得以避免。但负指数幂的消失会导致 NFTSM 控制在平衡点附近收敛速率下降, 即在平衡点附近 FTSM 控制的收敛速率要高于 NFTSM 的收敛速率。通过 Matlab 分别求解微分方程式(4a)和式(4b)可得系统状态在滑模面上的收敛情况, 如图 1 所示:

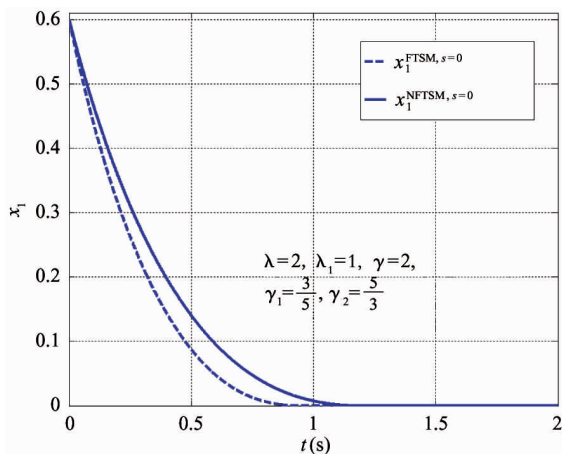


图 1 NFTSM 滑模面和 FTSM 滑模面上的系统状态收敛曲线

由图 1 可知, 当在滑模面上初始位置相同时, 在不考虑奇异的情况下, FTSM 的收敛速率要快于 NFTSM 的收敛速率。综合考虑 FTSM 快速收敛性和 NFTSM 的非奇异特性, 本文提出了分段滑模控制设计方法, 与传统的 NFTSM 控制相比, 加快了系统变量在滑动阶段的收敛速率, 改善了鲁棒性和系统的动态性能。

3 新型非奇异快速终端滑模设计

在设计新型非奇异终端滑模之前, 首先定义两个非线性函数如下所示:

$$\gamma_1(x_1) = \alpha_1 + \beta_1 \text{actan}[\kappa(\Delta - x_1^2)] \quad (6a)$$

$$\gamma_2(x_1) = \alpha_2 + \beta_2 \text{actan}[\kappa(x_1^2 - \Delta)] \quad (6b)$$

其中, $\alpha_1 \in (0.5, 1), \beta_1 \in (0.5, 1), \alpha_1 - \beta_1 \in (0, 0.5), \alpha_2 \in (1, 2), \beta_2 \in (0, 1), \alpha_2 - \beta_2 \in (1, 2), \Delta \in (0, 1)$ 。同时, 参数 $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ 之间满足以下不等式:

$$\alpha_1 + \beta_1 - \alpha_2 + \beta_2 < 0 \quad (7)$$

当 $\kappa \rightarrow +\infty$ 时, $\text{actan}[\kappa(\Delta - x_1^2)] \rightarrow \text{sign}(\Delta - x_1^2)$, 即有

$$\begin{cases} \gamma_1(x_1) = \alpha_1 + \beta_1 \in (1, 2), \gamma_2(x_1) \\ \quad = \alpha_2 - \beta_2 \in (1, 2), |x_1| \leq \sqrt{\Delta} \\ \gamma_1(x_1) = \alpha_1 - \beta_1 \in (0, 0.5), \gamma_2(x_1) \\ \quad = \alpha_2 + \beta_2 \in (1, 3), |x_1| > \sqrt{\Delta} \end{cases} \quad (8)$$

以二阶非线性系统式(3)为应用对象, 同时根据式(7)和式(8)设计分段非奇异快速终端滑模为

$$\begin{aligned} s &= x_1 + \lambda |x_1|^{\gamma} \text{sign}(x_1) + \lambda_1 |x_1|^{\gamma_1(x_1)} \text{sign}(x_1) \\ &\quad + \lambda_2 |x_2|^{\gamma_2(x_1)} \text{sign}(x_2) \end{aligned} \quad (9)$$

其中, $\lambda > 0, \lambda_1 > 0, \gamma \geq \gamma_2(x_1), \gamma_1(x_1)$ 和 $\gamma_2(x_1)$ 的定义同式(6a)和式(6b)。

当系统状态处于滑动阶段时, 即 $s = 0$, 根据式(9)可得

$$\begin{aligned} x_2 &= -\frac{1}{\lambda_2^{1/\gamma_2(x_1)}} [|x_1| + \lambda |x_1|^{\gamma} + \lambda_1 |x_1|^{\gamma_1(x_1)}]^{1/\gamma_2(x_1)} \\ &\quad \text{sign}(x_1) \end{aligned} \quad (10)$$

定理 1: 对设计的非奇异快速终端滑模式(9), 系统会在滑模面 $s = 0$ 上有限时间收敛到平衡点, 收

敛时间的保守估计值为

$$T \leq \frac{|x_1(0)|^{2(1-\psi_1)} - \Delta^{1-\psi_1}}{2^{1-\psi_1}(1-\psi_1)v_1} + \frac{\Delta^{1-\psi_2}}{2^{1-\psi_2}(1-\psi_2)v_2} \quad (11)$$

其中,

$$v_1 = \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^{\frac{1}{\alpha_2+\beta_2}} 2^{\psi_1} \lambda_1, \psi_1 = \frac{(\alpha_1 - \beta_1) + (\alpha_2 + \beta_2)}{2(\alpha_2 + \beta_2)} \quad (12a)$$

$$v_2 = \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^{\frac{1}{\alpha_2+\beta_2}} 2^{\psi_2} \lambda_1, \psi_2 = \frac{(\alpha_1 + \beta_1) + (\alpha_2 - \beta_2)}{2(\alpha_2 - \beta_2)} \quad (12b)$$

证明:构造 Lyapunov 候选函数

$$V_1 = \frac{1}{2} x_1^2 \quad (13)$$

根据二阶非线性系统式(3)可知 $\dot{x}_1 = x_2$, 对式(13)求导并代入式(10)可得:

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 &= x_1 \dot{x}_1 = x_1 x_2 = -\frac{1}{\lambda_2^{1/\gamma_2(x_1)}} [|x_1| + \lambda |x_1|^\gamma \\ &\quad + \lambda_1 |x_1|^{\gamma_1(x_1)}]^{1/\gamma_2(x_1)} |x_1| \end{aligned} \quad (14)$$

根据式(6)和式(8), $\gamma_2(x_1)$ 可被分成两种情况。所以,对 $\dot{V}_1$ 而言,可以进行分步讨论:

(1) 当 $|x_1| > \sqrt{\Delta}$ 时, $\kappa \rightarrow \infty$, 由式(14)和(8)得

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 &= x_1 x_2 \\ &= -\left(\frac{1}{\lambda_2}\right)^{\frac{1}{\alpha_2+\beta_2}} [|x_1| + \lambda |x_1|^\gamma + \lambda_1 |x_1|^{\alpha_1-\beta_1}]^{\frac{1}{\alpha_2+\beta_2}} \\ &\quad |x_1| \\ &\leq -\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^{\frac{1}{\alpha_2+\beta_2}} |x_1|^{\frac{(\alpha_1-\beta_1)+(\alpha_2+\beta_2)}{\alpha_2+\beta_2}} \\ &\leq -v_1 V_1^{\psi_1} \end{aligned} \quad (15)$$

其中, v_1 和 ψ_1 定义同式(12a), 解得收敛时间的保守估计为

$$T_1 \leq t_1, t_1 = \frac{|x_1(0)|^{2(1-\psi_1)} - \Delta^{1-\psi_1}}{2^{1-\psi_1}(1-\psi_1)v_1} \quad (16)$$

(2) 同理, 当 $|x_1| \leq \sqrt{\Delta}$, 对 $\kappa \rightarrow \infty$, 由式(8)得

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 &= x_1 x_2 \\ &= -\left(\frac{1}{\lambda_2}\right)^{\frac{1}{\alpha_2+\beta_2}} [|x_1| + \lambda |x_1|^\gamma + \lambda_1 |x_1|^{\alpha_1+\beta_2}]^{\frac{1}{\alpha_2+\beta_2}} \end{aligned}$$

$$|x_1|$$

$$\begin{aligned} &\leq -\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^{\frac{1}{\alpha_2+\beta_2}} \lambda_1 |x_1|^{\frac{(\alpha_1+\beta_1)+(\alpha_2-\beta_2)}{\alpha_2+\beta_2}} \\ &\leq -v_2 V_1^{\psi_2} \end{aligned} \quad (17)$$

其中, v_2 和 ψ_2 的定义同式(12b), 考虑不等式(7), $0 < \psi_2 < 1$, 解得收敛时间的保守估计为

$$T_2 \leq t_2, t_2 = \frac{\Delta^{1-\psi_2}}{2^{1-\psi_2}(1-\psi_2)v_2} \quad (18)$$

综上所述,系统在滑动阶段的收敛时间保守估计为

$$T = T_1 + T_2 \leq t_1 + t_2 \quad (19)$$

证毕。

(i) 当 $|x_1| > 1$ 时, 因为 $\gamma_1(x_1) < 1/2$, 所以, 滑模式(9)可以近似地表示为

$$s = x_1 + \lambda |x_1|^\gamma \text{sign}(x_1) + \lambda_2 |x_2|^{\alpha_2+\beta_2} \text{sign}(x_2) \quad (20)$$

滑模可以近似地表示为 NFTSM 的形式, 在远离平衡点时保持较快的收敛速率。

(ii) 当 $\sqrt{\Delta} < |x_1| \leq 1$ 时, 不考虑集总参数不确定性, x_2 较小, 且 $\gamma \geq \alpha_2 + \beta_2$, 所以, 滑模式(9)可以近似表示为

$$s = x_1 + \lambda |x_1|^\gamma \text{sign}(x_1) + \lambda_1 |x_1|^{\alpha_1-\beta_1} \text{sign}(x_1) \quad (21)$$

控制器可设计为

$$\begin{aligned} u_{\text{PWFTSM}} &= -\frac{1}{g(\mathbf{x})} [-\lambda_1 \gamma |x_1|^{\gamma-1} x_2 + \lambda \gamma_1 \\ &\quad |x_1|^{\alpha_1-\beta_1-1} x_2 + f(\mathbf{x}) + \eta \text{sign}(s)] \end{aligned} \quad (22)$$

因为 $\alpha_1 - \beta_1 - 1 \in (-1, -0.5)$, 负指数幂 $\lambda \gamma_1 |x_1|^{\alpha_1-\beta_1-1} x_2$ 的存在使系统在区间 $|x_1| \in (\sqrt{\Delta}, 1)$ 上收敛时, 保持和 FTSM 控制相似的收敛速率, 且不存在奇异现象。

(iii) 当 $|x_1| \leq \sqrt{\Delta}$ 时, 因为 $\gamma_1 \in (1, 2)$, $\gamma_2 \in (1, 2)$, 那么滑模式(9)可以近似表示为

$$s = x_1 + \lambda |x_1|^\gamma \text{sign}(x_1) + \lambda_2 |x_2|^{\alpha_2-\beta_2} \text{sign}(x_2) \quad (23)$$

滑模可近似表示为 NFTSM 的形式, 系统在平衡点避免了奇异现象, 实现快速有限时间收敛。

综合(i) ~ (iii) 可得, 本文设计的 PWNFTSM 可

以使系统在滑动阶段实现快速收敛。相较于 NFTSM 控制,大大加快了系统的收敛速率,改善了系统的动态性能。

4 基于 RBFNDO 的分段非奇异快速终端滑模设计

系统式(3)中存在集总参数不确定性 $\rho(t, \mathbf{x}, u)$, 因而会对系统的控制精度带来影响。为了提高系统的控制精度,改善系统性能,本文将引入 RBFNDO 来逼近系统中存在的集总参数不确定性。文献[22]提出的 RBFNDO 能快速估计系统中的集总参数不确定性项,在控制律中利用集总参数不确定性的估计值来消除系统未知有界扰动的影响,从而大大提高了系统的控制精度,改善了系统性能。

首先定义一个动态观测系统:

$$\dot{\mu} = \sigma \xi + \Lambda \xi^{\gamma_3} + f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x})u + \hat{\rho}(t, \mathbf{x}, u | \hat{\theta}) \tag{24}$$

其中, $\sigma > 0, \Lambda > 0, \xi = x_2 - \mu$ 代表干扰观测误差, $\hat{\rho}(t, \mathbf{x}, u | \hat{\theta})$ 代表 RBF 神经网络的输出。

RBF 神经网络是一种带有 3 层结构的神经网络,通过不断调整输出层和隐含层之间的计算权值,可以实现任意精度逼近未知信号。因此,RBF 神经网络对集总参数不确定性的逼近形式可以表示为

$$\hat{\rho}(t, \mathbf{x}, u | \hat{\theta}) = \hat{\theta}^T \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}) \tag{25}$$

其中, $\hat{\theta} = [\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \dots, \hat{\theta}_m]^T$ 表示可调节权值向量, $\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}) = [\varphi_1(\mathbf{x}), \varphi_2(\mathbf{x}), \dots, \varphi_n(\mathbf{x})]^T$ 表示径向基函数, $\varphi_i(\mathbf{x}) = \exp(-\|\mathbf{x} - c_i\|^2/\delta_i)$, $i = 1, 2, \dots, m, c_i$ 和 δ_i 分别表示径向基函数的中心和宽度。

RBF 神经网络逼近集总参数不确定性的最优权值可以表示为

$$\hat{\theta}^* = \arg \min_{\theta \in S_\theta} [\sup_{x \in S_x} |\hat{\rho}(t, \mathbf{x}, u | \hat{\theta}) - \rho(t, \mathbf{x}, u | \hat{\theta})|] \tag{26}$$

其中, $S_\theta = \{\theta | \|\theta\| \leq M_\theta\}$ 表示参数 θ 可执行域集合, $M_\theta \in R_+, S_x \in R^n$ 表示状态可达空间。

根据式(26),集总参数不确定性的最优逼近为

$$\rho(t, \mathbf{x}, u) = \hat{\theta}^{*T} \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}) + \varepsilon(\mathbf{x}) \tag{27}$$

其中, $|\varepsilon(\mathbf{x})| \leq \bar{\varepsilon}$ 代表逼近误差, $\bar{\varepsilon} > 0$ 且未知。

假设 2: 令 $\Delta\theta = \hat{\theta} - \hat{\theta}^*$, 假设 $\sum_{i=1}^m |\Delta\theta_i|$ 存在上

界,即 $\exists \Delta\bar{\theta} > 0$, 满足 $\sum_{i=1}^m |\Delta\theta_i| \leq \Delta\bar{\theta}$ 。

为保证闭环系统稳定和快速估计集总参数不确定性,RBF 神经网络干扰观测器参数自适应律为

$$\dot{\hat{\theta}} = L(\xi + \xi^{\gamma_3}) \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}) - I_\theta L \frac{(\xi + \xi^{\gamma_3}) \hat{\theta}^T \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x})}{\|\hat{\theta}\|} \hat{\theta} \tag{28}$$

其中, $L > 0$,

$$I_\theta = \begin{cases} 0, & \text{if } \|\hat{\theta}\|^2 < M_\theta \text{ 或 } \|\hat{\theta}\|^2 = M_\theta \text{ 且 } (\xi + \xi^{\gamma_3}) \hat{\theta}^T \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}) \leq 0 \\ 1, & \text{if } \|\hat{\theta}\|^2 = M_\theta \text{ 且 } (\xi + \xi^{\gamma_3}) \hat{\theta}^T \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}) > 0 \end{cases} \tag{29}$$

根据给出的 RBFNDO 设计式(25),结合系统式(3)和设计分段分奇异快速终端滑模式(9),设计系统控制律如下:

$$\begin{aligned} u_{\text{PWNTSM}} = & -\frac{1}{g(\mathbf{x})\lambda_2\gamma_2(x_1)} [1 + \lambda |x_1|^{\gamma-1} \\ & + \lambda_2 \frac{d\gamma_2(x_1)}{dx_1} |x_2|^{\gamma_2(x_1)} \ln(|x_2|) \text{sign}(x_2) \\ & + \lambda_1 \frac{d\gamma_1(x_1)}{dx_1} |x_1|^{\gamma_1(x_1)} \ln(|x_1|) \text{sign}(x_1) \\ & + \lambda_1 \gamma_1(x_1) |x_1|^{\gamma_1(x_1)-1} |x_2|^{2-\gamma_2(x_1)} \text{sign}(x_2) \\ & - \frac{1}{g(\mathbf{x})} [k_1 |s|^{\varphi_1} \text{sign}(s) + k_2 |s|^{\varphi_2} \text{sign}(s) \\ & + \hat{\rho}(t, \mathbf{x}, u | \hat{\theta}) + f(\mathbf{x})] \end{aligned} \tag{30}$$

其中, $\frac{d\gamma_1(x_1)}{dx_1} = \frac{2\beta_1\kappa x_1}{1 + [\kappa(x_1^2 - \Delta)]^2}$, $\frac{d\gamma_2(x_1)}{dx_1} = -\frac{2\beta_2\kappa x_1}{1 + [\kappa(x_1^2 - \Delta)]^2}$, $0 < \varphi_1 < 1, \varphi_2 > 1, k_1 > 0, k_2 > 0$ 。

定理 2: 考虑二阶非线性不确定系统式(3),如果 RBFNDO 设计为式(25),控制器设计为式(30),那么系统可以在有限时间内收敛到一个剩余集中,剩余集表示为

$$\begin{aligned} s = \left\{ s \middle| |s| \leq \min\{\Delta_1, \Delta_2\}, \Delta_1 = \left(\frac{\Delta\bar{\theta} + \bar{\varepsilon}}{k_1}\right)^{\frac{1}{\varphi_1}}, \right. \\ \left. \Delta_2 = \left(\frac{\Delta\bar{\theta} + \bar{\varepsilon}}{k_2}\right)^{\frac{1}{\varphi_2}} \right\} \end{aligned} \tag{31}$$

证明: 构造 Lyapunov 候选函数如下所示:

$$V_2 = \frac{1}{2} s^2 \tag{32}$$

根据设计的分段非奇异快速终端滑模式(9), 可得滑模导数为

$$\begin{aligned} \dot{s} = & x_2 + \lambda |x_1|^{\gamma-1} x_2 + \lambda_1 \dot{\gamma}_1(x_1) |x_1|^{\gamma_1(x_1)} \\ & \ln(|x_1|) \operatorname{sign}(x_1) + \lambda_1 \gamma_1(x_1) |x_1|^{\gamma_1(x_1)-1} x_2 \\ & + \lambda_2 \dot{\gamma}_2(x_1) |x_2|^{\gamma_2(x_1)} \ln(|x_2|) \operatorname{sign}(x_2) \\ & + \lambda_2 \gamma_2(x_1) |x_2|^{\gamma_2(x_1)-1} \dot{x}_2 \end{aligned} \quad (33)$$

代入系统式(3)可得

$$\begin{aligned} \dot{s} = & x_2 + \lambda |x_1|^{\gamma-1} x_2 + \lambda_1 \dot{\gamma}_1(x_1) |x_1|^{\gamma_1(x_1)} \\ & \ln(|x_1|) \operatorname{sign}(x_1) + \lambda_1 \gamma_1(x_1) |x_1|^{\gamma_1(x_1)-1} x_2 \\ & + \lambda_2 \dot{\gamma}_2(x_1) |x_2|^{\gamma_2(x_1)} \ln(|x_2|) \operatorname{sign}(x_2) \\ & + \lambda_2 \gamma_2(x_1) |x_2|^{\gamma_2(x_1)-1} \times [f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x})u \\ & + \rho(t, \mathbf{x}, u)] \end{aligned} \quad (34)$$

将控制律式(30)代入滑模导数式(33)后整理得

$$\begin{aligned} \dot{s} = & \vartheta(\mathbf{x}) [-k_1 |s|^{\varphi_1} \operatorname{sign}(s) - k_2 |s|^{\varphi_2} \operatorname{sign}(s) \\ & + \bar{\rho}(t, \mathbf{x}, u)] \end{aligned} \quad (35)$$

其中, $\bar{\rho}(t, \mathbf{x}, u) = \rho(t, \mathbf{x}, u) - \hat{\rho}(t, \mathbf{x}, u | \hat{\boldsymbol{\theta}})$, $\vartheta(\mathbf{x}) = \lambda_2 \gamma_2(x_1) |x_2|^{\gamma_2(x_1)-1}$ 。

对式(32)求导,并将式(35)代入可得

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 = & s\vartheta(\mathbf{x}) [-k_1 |s|^{\varphi_1} \operatorname{sign}(s) - k_2 |s|^{\varphi_2} \operatorname{sign}(s) \\ & + \bar{\rho}(t, \mathbf{x}, u)] \end{aligned} \quad (36)$$

将式(36)变形可得

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 = & -s\vartheta(\mathbf{x}) \left[k_1 |s|^{\varphi_1} \operatorname{sign}(s) \right. \\ & \left. + \left(k_2 - \frac{\bar{\rho}(t, \mathbf{x}, u)}{|s|^{\varphi_2} \operatorname{sign}(s)} \right) |s|^{\varphi_2} \operatorname{sign}(s) \right] \end{aligned} \quad (37a)$$

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 = & -s\vartheta(\mathbf{x}) \left[\left(k_1 - \frac{\bar{\rho}(t, \mathbf{x}, u)}{|s|^{\varphi_1} \operatorname{sign}(s)} \right) |s|^{\varphi_1} \operatorname{sign}(s) \right. \\ & \left. + k_2 |s|^{\varphi_2} \operatorname{sign}(s) \right] \end{aligned} \quad (37b)$$

根据式(37a)和(37b)可知,因为 $\vartheta(\mathbf{x}) > 0$, 欲使 $V_2 \leq 0$ 成立,需满足

$$k_2 - \frac{|\bar{\rho}(t, \mathbf{x}, u)|}{|s|^{\varphi_2}} > 0 \text{ 或 } k_1 - \frac{|\bar{\rho}(t, \mathbf{x}, u)|}{|s|^{\varphi_1}} > 0 \quad (38)$$

成立。由假设2及式(25)和(27)可以得到 $|\bar{\rho}(t, \mathbf{x}, u)|$ 的上界如下所示:

$$\begin{aligned} |\bar{\rho}(t, \mathbf{x}, u)| &= |\rho(t, \mathbf{x}, u) - \hat{\rho}(t, \mathbf{x}, u | \hat{\boldsymbol{\theta}})| \\ &= \left| \sum_{i=1}^m \Delta \theta_i \varphi_i(\mathbf{x}) + \varepsilon(\mathbf{x}) \right| \\ &= \sum_{i=1}^m |\Delta \theta_i| + |\varepsilon(\mathbf{x})| \\ &\leq \Delta \bar{\theta} + \bar{\varepsilon} \end{aligned} \quad (39)$$

所以,根据式(38)和(39)可得系统最终会在有限时间收敛到剩余集式(31)中,证毕。

5 仿真分析

根据二阶非线性不确定系统式(3),当不考虑集总参数不确定性和RBFNDO时,则 $\rho(t, \mathbf{x}, u) = \hat{\rho}(t, \mathbf{x}, u | \hat{\boldsymbol{\theta}}) = 0$ 。基于双幂次趋近律的FTSM和NFTSM控制器设计如下:

$$\begin{aligned} u_{\text{FTSM}} = & -\frac{1}{g(\mathbf{x})} [\lambda_1 \gamma |x_1|^{\gamma-1} x_2 + \lambda \gamma_1 |x_1|^{\gamma_1-1} x_2 \\ & + k_1 |s|^{\varphi_1} \operatorname{sign}(s) + k_2 |s|^{\varphi_2} \operatorname{sign}(s) + f(\mathbf{x})] \end{aligned} \quad (40a)$$

$$\begin{aligned} u_{\text{NFTSM}} = & -\frac{1}{g(\mathbf{x})} \left[\frac{\lambda}{\gamma_2} (1 + \lambda_1 \gamma |x_1|^{\gamma-1}) |x_2|^{2-\gamma_2} \operatorname{sign}(x_2) \right. \\ & \left. + k_1 |s|^{\varphi_1} \operatorname{sign}(s) + k_2 |s|^{\varphi_2} \operatorname{sign}(s) + f(\mathbf{x}) \right] \end{aligned} \quad (40b)$$

令 $f(\mathbf{x}) = x_1^3 x_2$, $g(\mathbf{x}) = 1$, 系统状态初始值为 $(x_1, x_2) = (2, 0)$, 控制参数设置如表1所示。

表1 PWNFTSM、NFTSM、FTSM 3种控制算法的参数设置

	PWNFTSM 控制	NFTSM 控制	FTSM 控制
	$\alpha_1 = 0.9, \beta_1 = 0.6, \alpha_2 = 1.6,$		
参	$\beta_2 = 0.4,$	$\gamma = \alpha_1 + \beta_1 = 2,$	$\gamma = \alpha_1 + \beta_1 = 2,$
数	$\gamma = \alpha_1 + \beta_1 = 2, \kappa = 10,$	$\gamma_2 = \alpha_2 - \beta_2 = 1.2,$	$\gamma_1 = 1/\gamma_2 \approx 0.8333,$
设	$\delta = 0.01,$	$\lambda = \lambda_1 = 1,$	$\lambda = \lambda_1 = 1,$
置	$\lambda = \lambda_1 = \lambda_2 = 1, k_1 = k_2 = 5,$	$\varphi_1 = 1/3, \varphi_2 = 3/2$	$\varphi_1 = 1/3, \varphi_2 = 1.5$
	$\varphi_1 = 1/3, \varphi_2 = 3/2$		

考虑本文设计的 PWNFTSM 控制式 (30), 与控制律式 (40a) 及式 (40b) 的对比仿真结果如图 2 所

示。

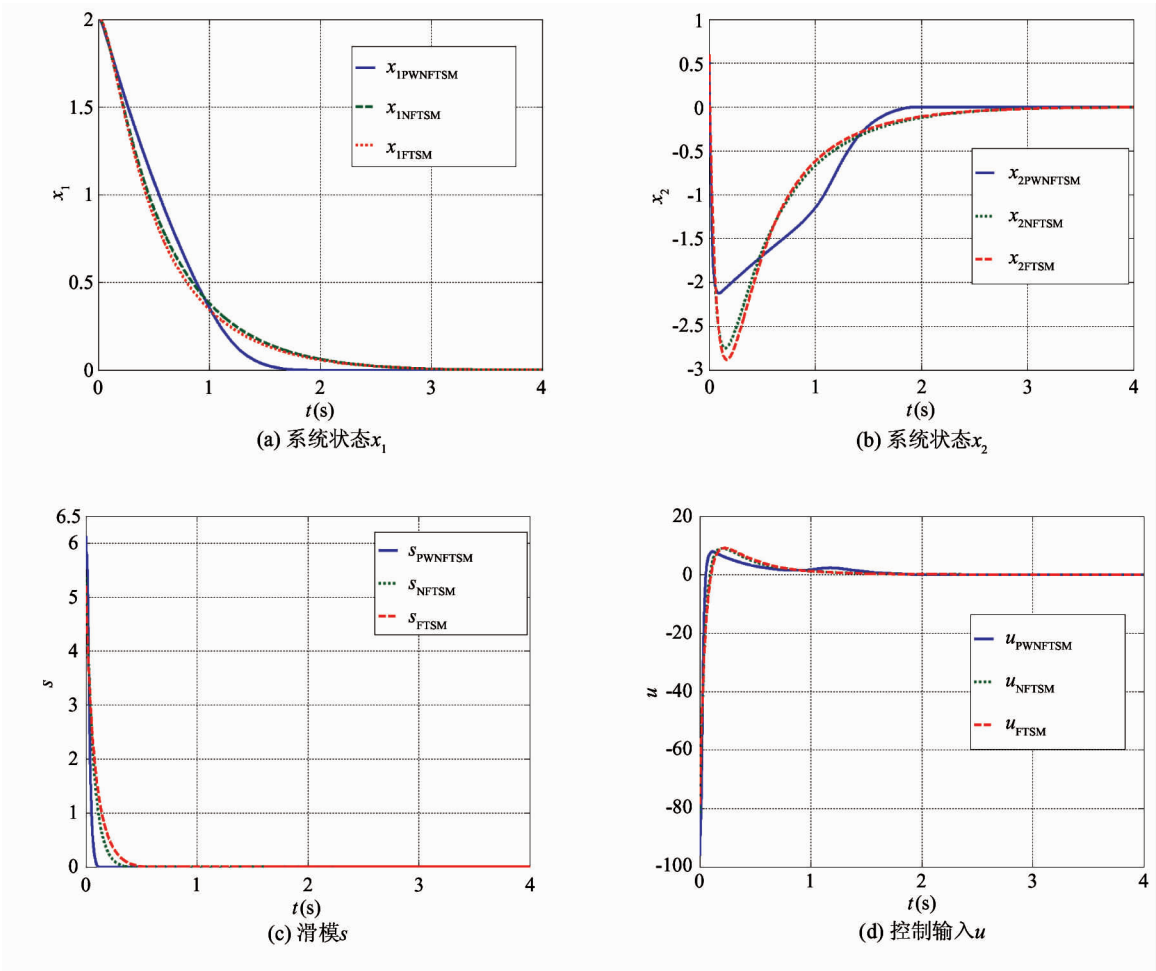


图 2 二阶非线性不确定系统 PWNFTSM 控制和 NFTSM 及 FTSM 控制系统状态变化对比曲线

图 2 给出了 PWNFTSM 控制和 NFTSM 及 FTSM 控制系统状态对比曲线。由图 2(a) 和图 2(b) 可知,不考虑集总参数不确定性和 RBFNDO,系统在控制器作用下,PWNFTSM 控制可以获得比 NFTSM 和 FTSM 控制更快的收敛速率。其中, $t_{\text{PWNFTSM}} = 1.9\text{s}$, $t_{\text{NFTSM}} \approx t_{\text{FTSM}} = 3.2\text{s}$ 。因为 NFTSM 和 FTSM 控制参数 γ_1 和 γ_2 比较接近 1,所以系统状态 x 的收敛时间基本相同。由图 2(c) 可得,PWNFTSM 控制的收敛速率要快于 NFTSM 及 FTSM 的收敛速率,3 者收敛到 $s = 0$ 的时间分别为 $t_{r\text{PWNFTSM}} = 0.1\text{s}$, $t_{r\text{NFTSM}} = 0.3\text{s}$, $t_{r\text{FTSM}} = 0.4\text{s}$, 所以根据图 2(a) ~ (c),系统在滑模面上的收敛时间可以计算为: $t_{s\text{PWNFTSM}} = 1.8\text{s}$, $t_{s\text{NFTSM}} = 2.9\text{s}$, $t_{s\text{FTSM}} = 2.8\text{s}$ 。根据时间的计算结果,在滑动阶段,系统在滑模面 $s_{\text{PWNFTSM}} = 0$ 上的收敛速

率要比 $s_{\text{NFTSM}} = 0$ 及 $s_{\text{FTSM}} = 0$ 上更快。同时,由图 2(d) 得,3 种方法均为连续滑模控制,控制输入变化不大。综上所述,本文设计的 PWNFTSM 的性能要优于传统 NFTSM 和 FTSM 的性能。

考虑系统集总参数的不确定性 $\rho(t, \mathbf{x}, u)$ 并引入 RBFNDO,令 $\Delta f(\mathbf{x}) = 0.1\cos(5\pi t)f(\mathbf{x})$, $\Delta g(\mathbf{x}) = 0.1\sin(5\pi t)g(\mathbf{x})$, $d(t)$ 为占空比为 50%,周期为 1,振幅为 5 的周期性方波信号。所以集总参数不确定性可以表示为

$$\begin{aligned} \rho(t, \mathbf{x}, u) = & 0.1\cos(5\pi t)f(\mathbf{x}) \\ & + 0.1\sin(5\pi t)g(\mathbf{x})u + d(t) \end{aligned} \tag{41}$$

动态观测系统参数定义为 $\sigma = 100$, $\Lambda = 10$, $\gamma_3 = 3/5$ 。自适应 RBF 神经网络参数设置为 $L =$

300, $M_\theta = 200$, $c_j = 0.1 \times [c_{j1}; c_{j2}]$, $c_{j1} = c_{j2} = [-1, -1, 1, 1, 1, 1]$, 初始权值为 $\hat{\theta}(0) = 0.1 \times \text{ones}(1, 5)$ 。保持控制参数不变, 考虑 RBFNDO 和不考虑

RBFNDO 的连续 PWNFTSM 控制以及 NFTSM 控制律式(40b)对比仿真结果如图 3 和图 4 所示。

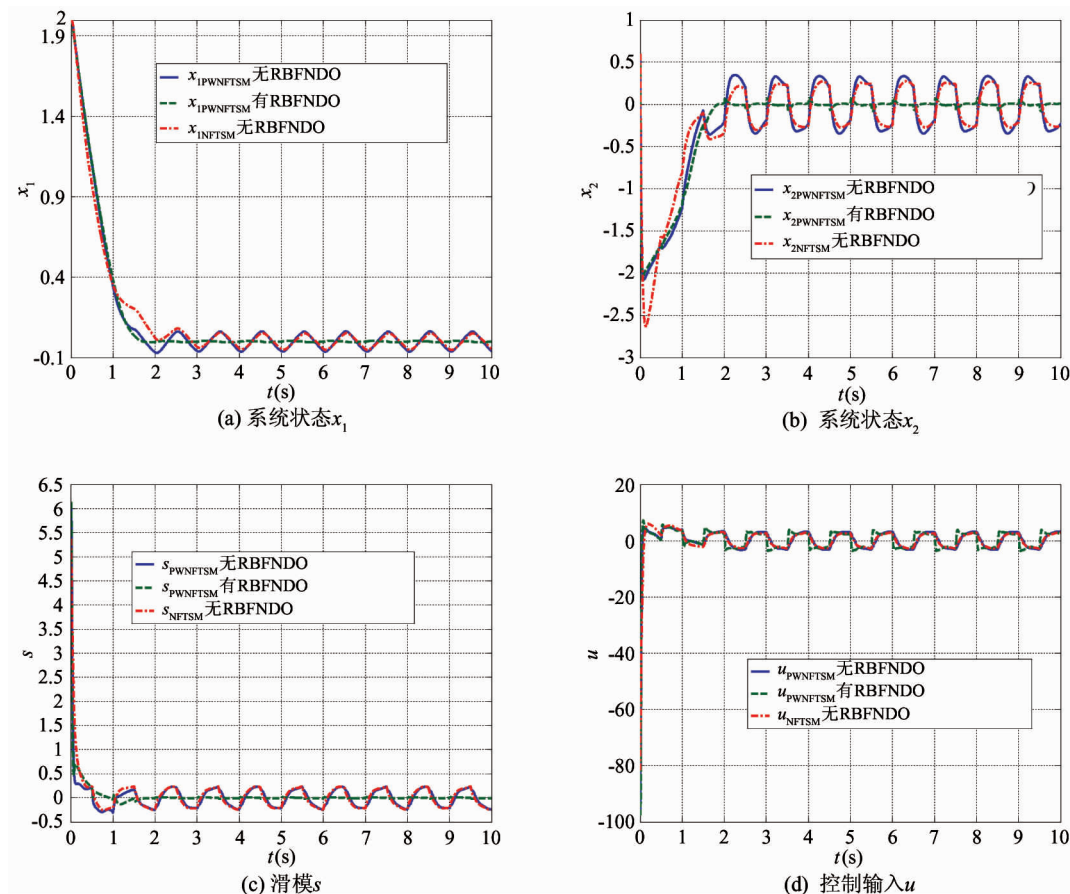


图3 考虑 RBFNDO 的 PWNFTSM 控制和不考虑 RBFNDO 的 PWNFTSM 控制及 NFTSM 控制的系统状态变化对比曲线

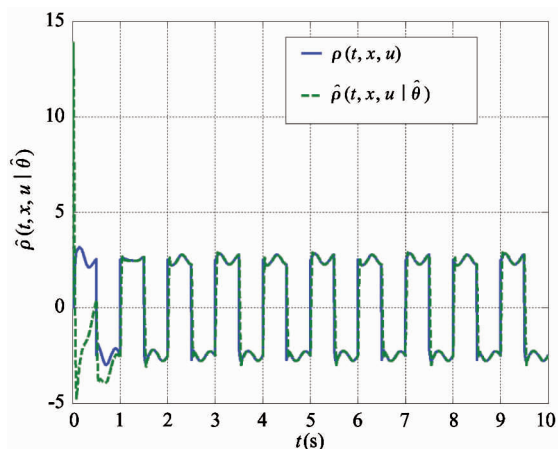


图4 RBFNDO 集总参数不确定性逼近曲线

考虑系统集总参数不确定性时, 3 种控制算法系统状态的收敛情况对比如图 3 所示。首先, 根据

图 3(a) ~ (c) 可知, 当不考虑 RBFNDO 时, 在集总参数不确定性作用下, PWNFTSM 控制和 NFTSM 控制具有相近的控制精度和鲁棒性能。系统状态只能在有限时间收敛到一个剩余集中, 控制精度较差。如果考虑在 PWNFTSM 控制律中引入 RBFNDO, 如图 3(a) ~ (c) 所示, 基于 RBFNDO 的 PWNFTSM 控制可以大大改善系统的控制精度和鲁棒性。如图 4 所示, 干扰观测器能准确估计系统的集总参数不确定性, 并对控制输入进行补偿, 改善系统动态性能。同时, 由图 3(d) 可得, 3 种控制算法的控制输入基本相同。综上所述, 对二阶非线性不确定系统, 本文设计的基于 RBFNDO 的 PWNFTSM 控制算法可以大大提高系统的控制精度, 改善系统鲁棒性, 提高系统的动态性能。

6 结论

针对传统非奇异快速终端滑模在平衡点附近收敛速度慢的问题,本研究首先设计了一种分段非奇异快速终端滑模,通过引入快速非奇异终端滑模中的非线性项,使系统在平衡点附近的局部区域实现快速收敛。同时,考虑二阶非线性不确定系统中存在集总参数不确定性的问题,结合 RBF 神经网络干扰观测器技术,设计了一种基于 RBF 神经网络干扰观测器的二阶非线性不确定系统的分段非奇异快速终端滑模控制算法,提高了系统的控制精度,改善了系统鲁棒性。但是,本研究仍然存在许多不足,例如无法精确求出系统状态在分段滑模面上的收敛时间,这需要在以后的工作中进行进一步的探究。

参考文献

- [1] Wu L, Ho D W C. Sliding mode control of singular stochastic hybrid systems[J]. *Automatica*, 2010, 46(4): 779-783
- [2] Wang Z P, Yang W R, Ding G X. Sliding mode control for trajectory tracking of nonholonomic wheeled mobile robots based on neural dynamic model[C]. In: Proceedings of 2010 2nd WRI Global Congress, Intelligent Systems, Wuhan, China, 2010. 270-273
- [3] Li T H S, Huang Y C. MIMO adaptive fuzzy terminal sliding-mode controller for robotic manipulators[J]. *Information Sciences*, 2010, 180(23):4641-4660
- [4] Fallaha C J, Saad M, Kanaan H Y, et al. Sliding mode robot control with exponential reaching law[J]. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 2011, 58(2):600-610
- [5] Xing H L, Li J. Flight attitude sliding mode control design based on the compensation of extended state observer[J]. *Applied Mechanics and Materials*, 2014, 716-717: 1689-1693
- [6] Vaidyanathan S. Global chaos synchronization of chemical chaotic reactors via novel sliding mode control method[J]. *International Journal of Chemtech Research*, 2015, 8(7):209-221
- [7] 姚中华, 孙跃, 唐春森, 等. 连续时间系统滑模趋近律的改进[J]. *重庆大学学报*, 2013, 36(4):51-55
- [8] Niu Y, Ho D W C, Wang Z. Improved sliding mode control for discrete-time systems via reaching law[J]. *IET Control Theory and Applications*, 2010, 4(11):2245-2251
- [9] 高为炳. 非线性系统的变结构控制[J]. *自动化学报*, 1989, 15(5):408-415
- [10] Hung J Y, Gao W, Hung J C. Variable structure control: a survey[J]. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 1993, 40(1):2-22
- [11] Yu S, Yu X, Shirinzadeh B, et al. Continuous finite-time control for robotic manipulators with terminal sliding mode[J]. *Automatica*, 2005, 41(11):1957-1964
- [12] 张合新, 范金锁, 孟飞, 等. 一种新型滑模控制双幂次趋近律[J]. *控制与决策*, 2013, 28(2):289-293
- [13] Venkataraman S T, Gulati S. Terminal slider control of robot systems[J]. *Journal of Intelligent and Robotic Systems*, 1993, 7(1):31-55
- [14] Zhao L, Jia Y. Finite-time attitude tracking control for a rigid spacecraft using time-varying terminal sliding mode techniques[J]. *International Journal of Control*, 2015, 88(6):1150-1162
- [15] Wang Y, Gu L, Gao M, et al. Multivariable output feedback adaptive terminal sliding mode control for underwater vehicles[J]. *Asian Journal of Control*, 2016, 18(1):247-265
- [16] 杨晓骞, 李健, 董毅. 非线性不确定系统的非奇异快速终端滑模控制[J]. *控制理论与应用*, 2016, 33(6):772-778
- [17] Feng Y, Yu X, Man Z. Non-singular terminal sliding mode control of rigid manipulators[J]. *Automatica*, 2002, 38(12):2159-2167
- [18] Yang L, Yang J. Nonsingular fast terminal sliding-mode control for nonlinear dynamical systems[J]. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2011, 21(16):1865-1879
- [19] Ginoya D, Shendge P D, Phadke S B. Sliding mode control for mismatched uncertain systems using an extended disturbance observer[J]. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 2014, 61(4):1983-1992
- [20] Ji D H, Jeong S C, Ju H P, et al. Robust adaptive backstepping synchronization for a class of uncertain chaotic systems using fuzzy disturbance observer[J]. *Nonlinear*

Dynamics, 2012, 69(3):1125-1136*dynamics*, 2015, 82(4):1671-1682

[21] Chen M, Yu J. Disturbance observer-based adaptive sliding mode control for near-space vehicles[J]. *Nonlinear*

[22] 黄国勇. 基于神经网络干扰观测器的终端滑模控制[J]. 吉林大学学报(工), 2011, 41(6):1726-1730

Piece-wise nonsingular fast terminal sliding mode control for second-order nonlinear uncertainty systems

Zhang Beibei, Gao Shouli, Zhao Dongya

(College of Chemical Engineering, China University of Petroleum, Qingdao 266580)

Abstract

The sliding mode control for nonlinear uncertainty systems is studied. Aiming at nonsingular fast terminal sliding mode (NFTSM)'s problem of slow convergence near the equilibrium point, a piece-wise nonsingular fast terminal sliding mode (PWNFTSM) is proposed. The designed PWNFTSM introduces nonlinear terms to achieve system convergence in a limited time and continuous faster convergence in the local region near the equilibrium point and to avoid singularity by applying the nonlinear terms of classical fast terminal sliding mode (FTSM) structure. Further, a piece-wise nonsingular fast terminal sliding mode control algorithm based on the radial basis function (RBF) network disturbance observer (RBFNDO) for second-order nonlinear uncertainty systems is designed. The disturbance observer approach can estimate the system uncertainties and disturbances so as to improve the control precision and the robustness. The close-loop system stability can be demonstrated by using the Lyapunov method. Finally, the simulation results verify that the proposed approach can effectively increase the convergence rate, acquire higher control precision and achieve superior performance for second-order nonlinear uncertainty systems.

Key words: piece-wise nonsingular fast terminal sliding mode (PWNFTSM), radial basis function (RBF) network disturbance observer (RBFNDO), second-order nonlinear uncertainty systems, robustness