

双回转驱动 RRPRR 型五杆机构运动分析<sup>①</sup>

王登科<sup>②</sup> 尹明富 孙会来 赵镇宏

(天津工业大学机械工程学院 天津 300387)

**摘 要** 研究了平面五杆机构中 RRPRR 型滑块五杆机构在不同参数匹配下的轨迹曲线及速度。以矢量法和矩阵运算法分别建立五杆机构在普通双回转驱动下的运动模型,结果表明,两种计算方法具有同等精度。对比两种方法的计算量和结果表达形式,可知矩阵计算方法具有计算量小且易于编程的特点。由于机构在不同参数匹配下的运动特性不同,因此对不同杆长匹配、不同传动比匹配下的五杆机构输出轨迹和输出速度进行研究。分析表明,调整两驱动杆件长度匹配、机架长度以及传动比匹配均可改变输出轨迹域形状,并会引起速度波动的增加。通过对机构参数进行研究可为相关的工程设计人员提供借鉴。

**关键词** 连杆机构, 双驱动, 矩阵运算, 运动分析

0 引 言

平面五杆机构是杆数最少闭环数目最少的多自由度机构,依据机构的型综合对平面五杆机构进行分类,可以得到 13 种由转动副(R)和移动副(P)两种基本铰链组成的构型<sup>[1,2]</sup>。按照运动副组成数目的不同,这 13 种构型又可以分为下述 5 类:全铰链型(RRRRR)1 种,4R1P 型 3 种、3R2P 型 5 种、2R3P 型 3 种以及 PRRPR 型 1 种。由于五杆机构的运动副均为低副,运动副之间的接触面积大,接触应力小;低副元素的构型简单、制造方便,能获得高的加工精度,并且具有较高的承载能力,使得五杆机构被广泛应用在工程机械中。RRPRR 型滑块五杆机构,相对其他类型五杆机构,机构的可动性不受杆长条件约束<sup>[3]</sup>,基于此情况,机构的灵活性得到很大提高,滑块五杆机构的应用范围变得非常广泛。

对五杆机构的研究,现在的研究热点集中在全转动副型五杆机构的可动性<sup>[4]</sup>以及部分单滑块机

构受控驱动下实现特定的轨迹<sup>[5-7]</sup>、运动误差<sup>[8,9]</sup>、机构的奇异点<sup>[10,11]</sup>以及机构的灵活工作空间<sup>[12,13]</sup>等方面。对单移动副的滑块五杆机构在常规回转驱动下的研究不多,对滑块五杆机构在不同杆长匹配、传动比匹配下的运动规律研究相对薄弱。

借助 Matlab 对滑块五杆机构运动进行分析,可实现机构运动的可视化表达,相比于图解法而言,计算精度得到了很大的提高。通过分析不同参数匹配下机构的输出轨迹和速度,有助于研究机构的运动规律,为工程设计人员初步设定机构参数提供借鉴。

1 滑块五杆机构简介

如图 1 所示,滑块五杆机构可以看作由四杆机构变换得到。将图 1(a)中 C 处的转动副转变为移动副和转动副的复合构件,得到图 1(b)中所示滑块五杆机构。在图 1(b)中,构件的总数目  $N = 5$ , 低副数目总数  $p = 5$ , 机构的自由度  $F$ :

$$F = 3(N - 1) - 2p = 3 \times 4 - 2 \times 5 = 2 \quad (1)$$

① 天津市科委(14JCTPJ00536)和天津市高等学校科技发展基金(20130402)资助项目。  
② 男,1992 年生,硕士生;研究方向:机械设计与制造;联系人,E-mail: wuhui0326@163.com  
(收稿日期:2018-03-12)

机构的运动状态、自由度与驱动数目满足下述关系。

(1) 当驱动数目等于机构的自由度时, 机构的运动状态唯一确定。

(2) 当机构的驱动数目小于机构的自由度时, 机构处于欠驱动状态, 运动状态不能确定。

(3) 当机构输入驱动的数目大于机构的自由度时, 机构的薄弱环节将发生破坏, 间隙大的机构除外。

因此, 为了保证机构能够实现确定的运动, 滑块五杆机构的驱动需要两个驱动原件。对机构的分析, 可以将该机构拆分成一个 R 型单杆机构和一个 RRP 型二副构件。机构任意时刻的运动状态可以看作由  $l_1, l_2, l_4, \varphi_2, \varphi_4, w_2, w_4$  7 项参数共同定义。

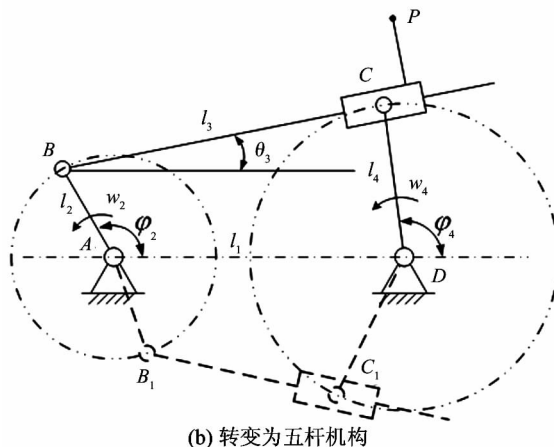
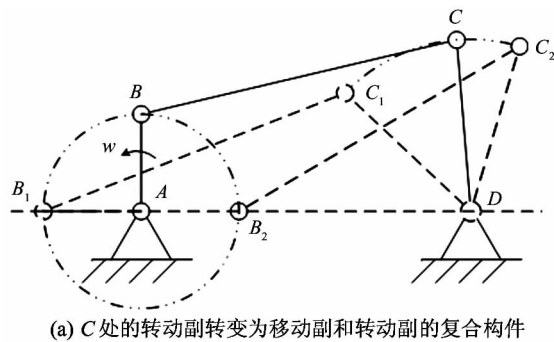


图 1 机构转变简图

## 2 运动分析

### 2.1 复数向量法

利用复数向量法, 将五杆机构看作一个封闭的平面多边形, 各个杆件看作向量, 进行机构的运动分析。由于方向的选取对计算结果不会产生影响, 规

定  $x$  轴的方向沿机架  $AD$  方向, 并规定自  $x$  轴位置旋转, 逆时针方向为正方向。

如图 2 所示, 已知驱动杆 2 和杆 4 的长度分别为  $l_2$  和  $l_4$ , 转动角速度分别为  $w_2$  和  $w_4$ , 转角分别为  $\varphi_2$  和  $\varphi_4$ , 机架的长度为  $l_1$ 。位置量为任意时刻连杆的有效长度为  $S$ 、连杆的摆动角  $\theta_3$ 、摆动角速度及摆动角加速度, 输出运动为摆块上点  $P$  的位置和速度。

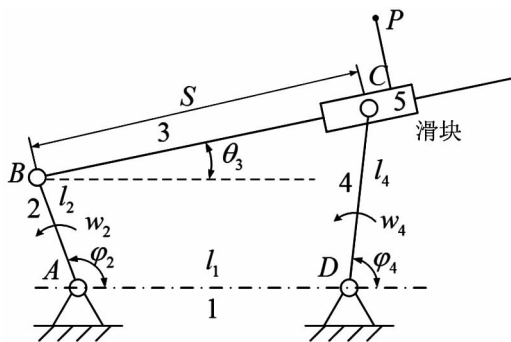


图 2 五杆机构运动简图

任意时刻, 将滑块锁定在连杆 3 上相应的位置, 此时得到平面四杆机构。运动过程中, 由于连架杆 2 和连架杆 4 的长度不发生变化, 机构运动性能的变化可看作在满足装配条件下, 连杆 3 长度的不断变化而引起的。因此对机构性能研究可以转化成若干个不同连杆长度下的四杆机构运动性能的叠加<sup>[14]</sup>。

取  $A$  点为直角坐标系的原点,  $ABCD A$  为形成的闭环, 矢量方程可以描述为

$$\vec{l}_2 + \vec{S} = \vec{l}_1 + \vec{l}_4 \quad (2)$$

式(2)的复数形式为

$$l_2 e^{i\varphi_2} + S e^{i\theta_3} = l_1 + l_4 e^{i\varphi_4} \quad (3)$$

式(3)分离实虚部, 得到:

$$\begin{cases} l_2 \cos \varphi_2 + S \cos \theta_3 = l_1 + l_4 \cos \varphi_4 \\ l_2 \sin \varphi_2 + S \sin \theta_3 = l_4 \sin \varphi_4 \end{cases} \quad (4)$$

对式(3)进行求导, 可以得到  $S$  的变化速度和连杆的摆动角速度:

$$i l_2 w_2 e^{i\varphi_2} + v e^{i\theta_3} + i S w_3 e^{i\theta_3} = i l_4 w_4 e^{i\varphi_4} \quad (5)$$

式(5)分离实虚部得到:

$$\begin{cases} w_2 l_2 \cos \varphi_2 + w_3 S \cos \theta_3 + v \cos \theta_3 = w_4 l_4 \cos \varphi_4 \\ -w_2 l_2 \sin \varphi_2 - w_3 S \sin \theta_3 + v \sin \theta_3 = -w_4 l_4 \sin \varphi_4 \end{cases}$$

(6)

式(3)对时间  $t$  二次求导,可以求得  $S$  的变化加速度和连杆摆角的角加速度:

$$il_2\alpha_2e^{i\varphi_2} - l_2w_2^2e^{i\varphi_2} + ae^{i\theta_3} + i vw_3e^{i\theta_3} + i vw_3e^{i\theta_3} + i Sae^{i\theta_3} - Sw_3^2e^{i\theta_3} = il_4\alpha_2e^{i\varphi_4} - l_4w_4^2e^{i\varphi_4} \quad (7)$$

式(7)分离实虚部得到:

$$\begin{cases} \alpha_2l_2\cos\varphi_2 - w_2^2l_2\sin\varphi_2 + \alpha_3S\cos\theta_3 - w_3^2S\sin\theta_3 \\ + w_3v\cos\theta_3 + a\cos\theta_3 - vw_3\sin\theta_3 \\ = \alpha_4l_4\cos\varphi_4 - w_4^2l_4\sin\varphi_4 - \alpha_2l_2\sin\varphi_2 \\ - w_2^2l_2\cos\varphi_2 - \alpha_3S\sin\theta_3 - w_3v\sin\theta_3 \\ - w_3^2S\cos\theta_3 + a\sin\theta_3 + vw_3\cos\theta_3 \\ = -\alpha_4l_4\sin\varphi_4 - w_4^2l_4\cos\varphi_4 \end{cases} \quad (8)$$

建立滑块上  $P$  点输出运动的数学模型:

$$\vec{P} = \vec{l}_2 + \vec{S} + \vec{r}_{CP} \quad (9)$$

式(9)分离实虚部得到:

$$\begin{cases} p_x = l_2\cos\varphi_2 + S\cos\theta_3 + L\cos(\pi - \beta + \theta_3) \\ p_y = l_2\sin\varphi_2 + S\sin\theta_3 + L\sin(\pi - \beta + \theta_3) \end{cases} \quad (10)$$

分析可知,求解  $\theta_3$  和  $S$  可完成对机构运动姿态的描述。

2.2 矩阵分析法

以  $A$  点作为整体坐标系的原点,  $AD$  方向为  $x$  轴方向,建立全局笛卡尔坐标系。以摆块回转副的中心作为坐标原点建立局部直角坐标系,如图 3 所示,局部坐标系下,滑块上某点坐标  $P(m,n)$ 。

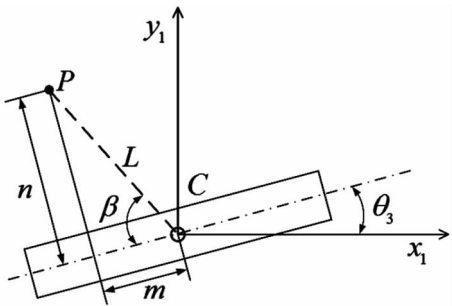


图 3 C 点局部坐标系示意图

如图 4 所示,假设  $P$  点的初始位置为  $P_i$ , 经过运动之后,  $P$  点到达  $P_j$  点,由定长变换理论<sup>[15]</sup>,其间的运动过程可以描述为,连架杆  $CD$  绕回转副逆

时针旋转  $\Delta\varphi_4$ , 到达坐标系  $\delta_k$ , 然后  $\delta_k$  再绕  $z_k$  轴旋转  $\Delta\theta_3$ , 然后到达运动之后位置点  $P_j$ 。

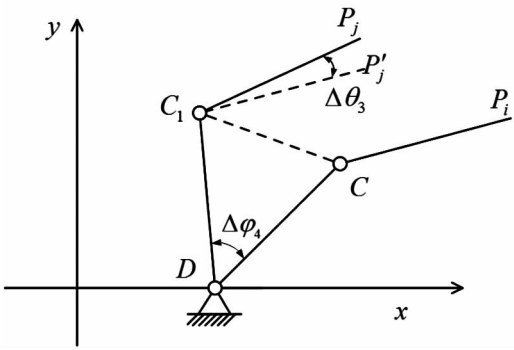


图 4 变换原理图

运动过程的数学描述为

$$P'_j = (R_{ik})_z \cdot P_i \quad (11)$$

$$P_j = (R_{kj})_z \cdot P'_j$$

由式(11)可以得到:

$$P_j = (R_{kj})_z \cdot (R_{ik})_z \cdot P_i \quad (12)$$

其中,

$$(R_{ik})_z = \begin{bmatrix} \cos(\Delta\theta_4) & -\sin(\Delta\theta_4) & 0 \\ \sin(\Delta\theta_4) & \cos(\Delta\theta_4) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (13)$$

$$(R_{kj})_z = \begin{bmatrix} \cos(\Delta\theta_3) & -\sin(\Delta\theta_3) & 0 \\ \sin(\Delta\theta_3) & \cos(\Delta\theta_3) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (14)$$

由此得到滑块上点  $P$  的数学表达式:

$$P_j = (R_{ik})_z \cdot r_{DC} + (R_{kj})_z \cdot r_{CP} + D_0 \quad (15)$$

式(15)对时间  $t$  求导,得到机构输出点的速度表达式:

$$\dot{P}_j = (\dot{R}_{ik})_z \cdot r_{DC} + (\dot{R}_{kj})_z \cdot r_{CP} \quad (16)$$

式(16)中,  $(\dot{R}_{ik})_z$  及  $(\dot{R}_{kj})_z$  分别为矩阵  $(R_{ik})_z$  和矩阵  $(R_{kj})_z$  对时间  $t$  的导数。

由于两驱动杆件匀速回转,则驱动杆件 2 和杆件 4 的角加速度  $\alpha_2 = 0, \alpha_4 = 0$ 。式(15)对时间二次求导,可以得到运动输出点的加速度表达式:

$$\ddot{P}_j = (\ddot{R}_{ik})_z \cdot r_{DC} + (\ddot{R}_{kj})_z \cdot r_{CP} \quad (17)$$

式(17)中  $(\ddot{R}_{ik})_z$  及  $(\ddot{R}_{kj})_z$  分别为矩阵  $(R_{ik})_z$  和矩阵  $(R_{kj})_z$  对时间  $t$  的二次导数。

对参数分析可以发现,其中的未知量为连杆摆角  $\theta_3$ , 摆角  $\theta_3$  的求解可以借助  $B$  点和  $C$  点的位置

方程。由于杆件 2 做圆周运动,转动副  $B$  点的轨迹满足:

$$\begin{cases} x_B = l_2 \cos \varphi_2 \\ y_B = l_2 \sin \varphi_2 \end{cases} \quad (18)$$

同理,杆件 4 绕转动副  $D$  做回转运动,  $D$  点的坐标  $(l_1, 0)$ , 转动副  $C$  点的运动轨迹可表示为

$$\begin{cases} x_c = l_1 + l_4 \cos \varphi_4 \\ y_c = l_4 \sin \varphi_4 \end{cases} \quad (19)$$

由于杆件 2 和杆件 4 输入的角速度恒定,任意时刻,杆件的转动角度满足:

$$\begin{cases} \varphi_2 = \varphi_{20} + w_2 t \\ \varphi_4 = \varphi_{40} + w_4 t \end{cases} \quad (20)$$

借助三角关系,由式(18)和式(19)可以求解连杆的摆动角度:

$$\theta_3 = \arctan\left(\frac{y_c - y_B}{x_c - x_B}\right) \quad (21)$$

式(21)对时间  $t$  求导可以得到连杆的摆动角速度:

$$w_3 = \dot{\theta}_3 = \frac{\frac{C}{A} - \frac{CD}{A^2}}{1 + \left(\frac{C}{A}\right)^2} \quad (22)$$

式中,

$$A = a + d \cos \theta_2 - b \cos \theta_1$$

$$B = w_4 d \sin \theta_4 - w_2 b \sin \theta_2$$

$$C = d \sin \theta_4 - b \sin \theta_2$$

$$D = -w_4 d \sin \theta_4 + w_2 b \sin \theta_2$$

式(22)对  $t$  求导可以得到连杆摆动角加速度表达式:

$$\begin{aligned} \alpha_3 = \ddot{\theta}_3 = & \frac{1}{1 + \left(\frac{C}{A}\right)^2} \left( \frac{E}{A} - \frac{2BD}{A^2} + \frac{2CD^2}{A^2} - \frac{CE}{A^2} \right) \\ & - \frac{1}{\left(1 + \left(\frac{C}{A}\right)^2\right)} \left[ \left( \frac{F}{A} - \frac{CD}{A^2} \right) \left( \frac{2CF}{A^2} - \frac{2CD^2}{A^3} \right) \right] \end{aligned} \quad (23)$$

式中,

$$E = -w_4^2 d \sin \theta_4 + b w_2^2 \sin \theta_2$$

$$F = d w_4 \sin \theta_4 - b w_2 \cos \theta_2$$

分析可知,任意时刻的连杆摆动角度、摆动加速度以及摆动角加速度均可求解。对两种计算方法的

参数进行分析发现,两种求解方法关键在于  $\theta_3$  的求解。

假定杆件 2 的长度为 100mm,连杆即杆件 3 的长度为 360mm,杆件 4 的长度为 130mm,机架的长度 300mm,两回转驱动角速度  $w_2$  和  $w_4$  均为 10rad/s。分别用矢量法和三角函数关系求解得到连杆的摆动角度如图 5 所示。

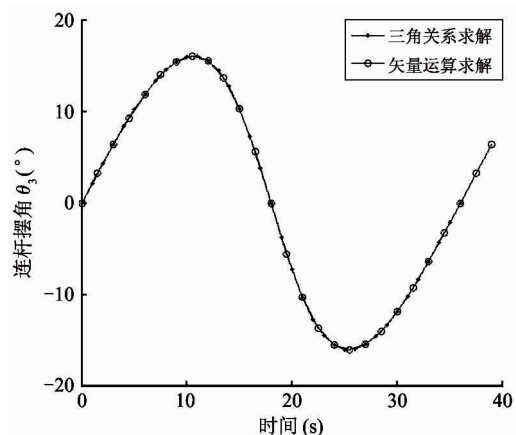


图 5 连杆摆动角度图

对两种方法计算得到的摆动角度图分析可知,二者的数值吻合度很高。因此,在对机构进行分析时,两种方法在精度上具有一致性。在此基础上,计算得到连杆的摆动角速度和摆动角加速度如图 6 所示。

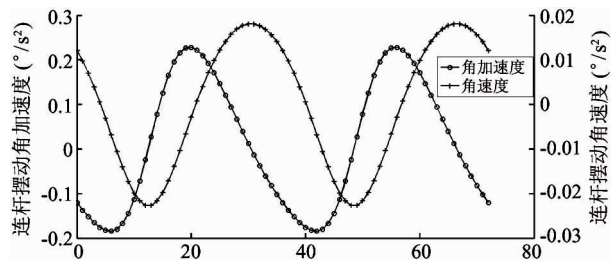


图 6 连杆摆动角速度、加速度图

### 3 参数分析

由以上分析可以得到,机构的定义参数有  $l_1$ 、 $l_2$ 、 $l_4$ 、 $\varphi_2$ 、 $\varphi_4$ 、 $w_2$ 、 $w_4$  7 项,对机构的参数进行分析,有助于明确参数对输出运动的影响。工程设计中可以初步选定所需参数范围,结合实际应用,优化参数。由于  $\varphi_2$ 、 $\varphi_4$  的值与时间有关,因此研究重点为不同驱动杆件长度匹配、不同机架长度以及不同传动比

下的轨迹和速度曲线。

分析不同驱动杆长匹配下的运动图谱(见图 7)可知,当杆长比为 1 时,机构的轨迹域最小,此时机构输出速度值为恒定值,随着杆长比值与 1 的差值的增大,轨迹域范围增大,同时引起速度的波动增大。分析机架长度对运动产生的影响,如图 8 所示,随着机架长度的增大,输出点轨迹形状、大小以及位置均会发生变化,当机架长度较小时,五杆机构的运动存在急转现象。分析不同传动比匹配下对运动产生的影响,如图 9 所示,结果表明,随着两驱动转动角速度比值  $w_2:w_4$  与 1 的差值的增加,轨迹曲线将

呈现一种自相交的趋势。同时速度曲线表明当  $w_4$  值对机构的输出速度影响更大。

4 结 论

本文以研究 RRP RR 型滑块五杆机构的运动特性为目的,分别采用矢量运算和矩阵运算的形式对机构的输出进行求解。通过计算摆角值,对比两种方法的运算结果,表明两种计算形式具有同等的计算精度。通过对机构的参数进行分析,发现当要求机构的输出速度高时,应该提高与滑块铰接的驱动

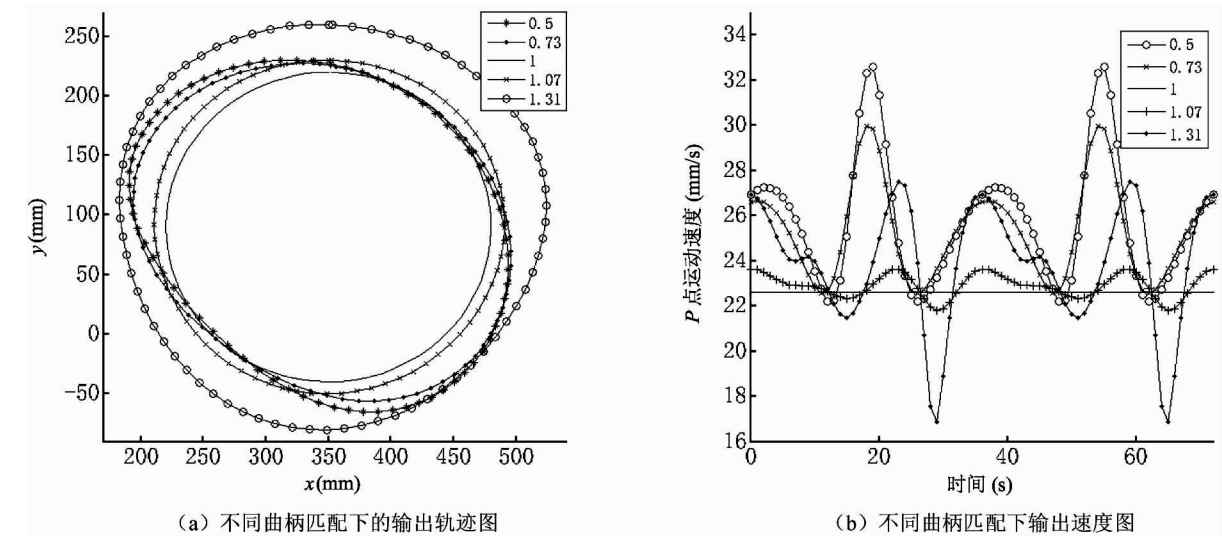


图 7 曲柄匹配对运动的影响图

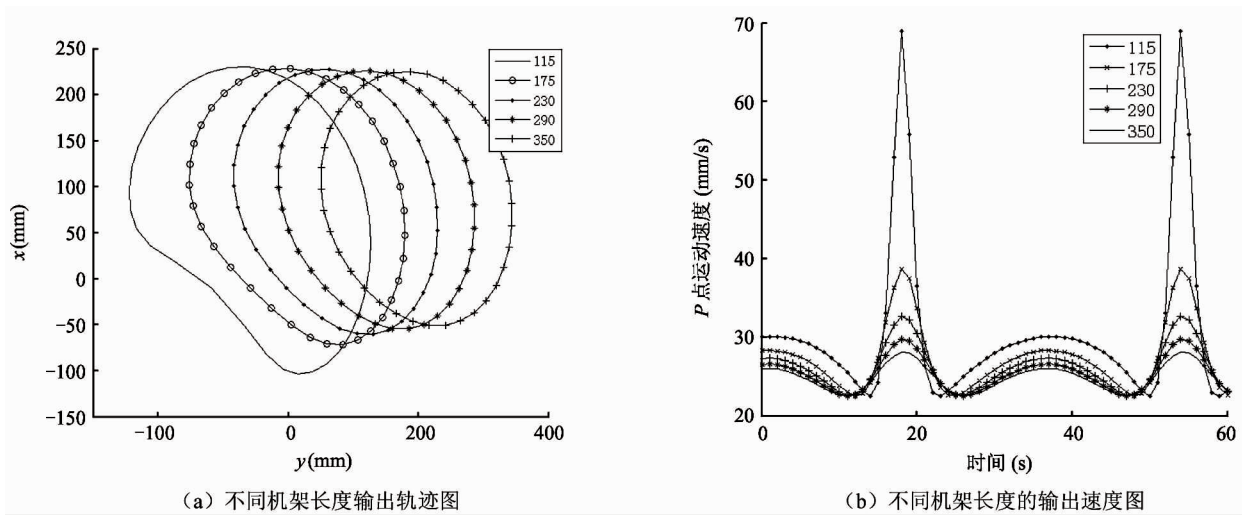


图 8 机架长对输出运动的影响图

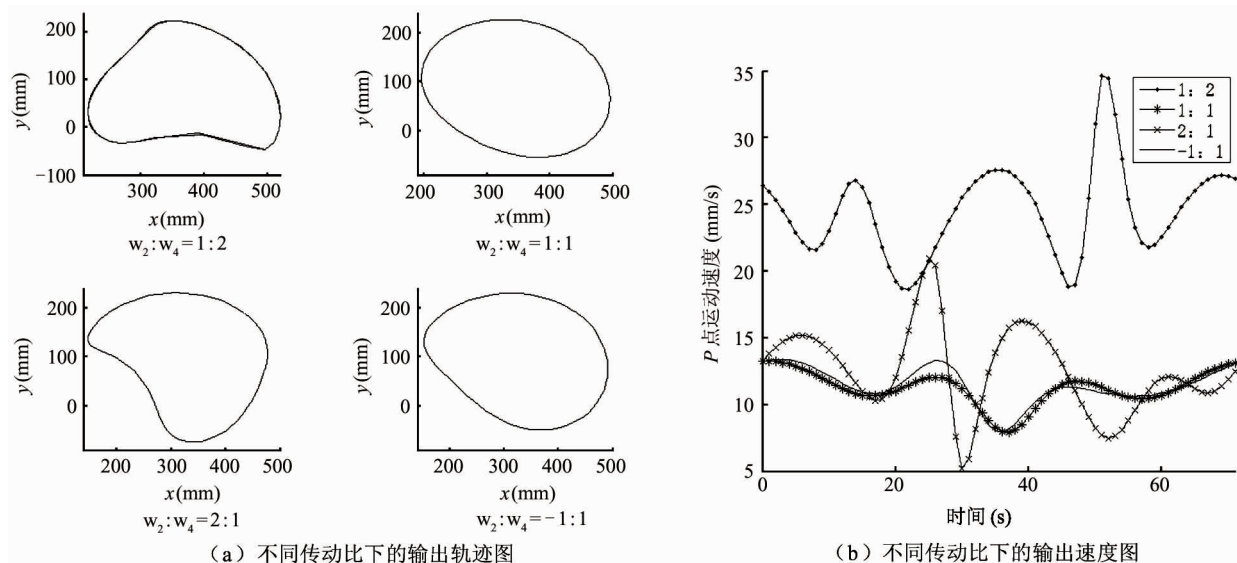


图9 传动比对输出运动影响图

杆件转动速度,当要求机构输出轨迹范围比较大时,应增大两个驱动杆件长度的差值。增大两个驱动回转频率的差值,有助于增加轨迹的复杂程度,此时机构适合应用于研磨等场所。借助对机构参数的分析可以确定机构的运动规律,在工程设计中,可初步确定机构参数匹配的范围,针对具体使用需求,对参数进行优化,可在很大程度上提高工作效率。

由于滑块平面五杆机构曲柄存在条件对杆长不敏感,这使得机构调整的灵活性得到很大提高。根据不同的工作情况,仅通过调整机构参数就可满足使用需求。但是由于五杆机构运动的平衡性能不佳,在高速、中重载荷下的机构动态性能会变得更差,这使得五杆机构的应用受到很大的局限。如何通过合理的参数配置以提高机构的动态特性,仍需进行深层次的研究。

#### 参考文献

- [1] 杨金堂. 受控五杆机构实现轨迹理论与实验研究:[博士学位论文][D]. 武汉:武汉科技大学, 2009. 14-32
- [2] Ting K L. Five-bar grashof criteria[J]. *Journal of Mechanical Design*, 1986, 108(4):533-537
- [3] 李佳, 廖汉元. 带有移动副的两自由度五杆机构的可动性条件[J]. *机械研究与应用*, 2002, 15(3):5-7
- [4] 赵建文, 宋胜涛, 侯志利, 等. 五杆机构的 CAD 系统研究与开发[J]. *机械设计与制造*, 2016(8):211-215
- [5] 马骏. 实现 D 形运动轨迹混合驱动平面五杆机构研究:[硕士学位论文][D]. 太原:中北大学, 2016. 32-40
- [6] Soto I, Campa R. Modelling and control of a spherical inverted pendulum on a five-bar mechanism[J]. *International Journal of Advanced Robotic Systems*, 2015, 12:1
- [7] Liu H, Pan W, Gai G, et al. Analysis and parameter solution of injection type no-till seeding into hole trajectory based on five-bar mechanism[J]. *Transactions of the Chinese Society of Agricultural Engineering*, 2017, 33(8):21-29
- [8] 陈根良, 林忠钦, 王皓. 操作机构尺寸与变形误差传递的统一建模方法研究[J]. *机械工程学报*, 2016, 52(6):180-180
- [9] Zi B, Ding H, Wu X, et al. Error modeling and sensitivity analysis of a hybrid-driven based cable parallel manipulator[J]. *Precision Engineering*, 2014, 38(1):197-211
- [10] 宋胜涛, 赵建文, 马瑶, 等. 可控 RRRPP 型机构的可动性与轨迹图谱研究[J]. *组合机床与自动化加工技术*, 2017(4):14-17
- [11] 王君, 牛克佳, 聂良益, 等. 单自由度复杂平面连杆机构的奇异性分析[J]. *中国机械工程*, 2018, 29(1):36-40
- [12] Ilia D, Sinatra R. A novel formulation of the dynamic balancing of five-bar linkages with applications to link optimization[J]. *Multibody System Dynamics*, 2009, 21(2):193-211
- [13] 周双林, 邹慧君, 郭为忠, 等. 平面闭链 RRRRP 五杆机



构柔性工作空间的分析. 上海交通大学学报,2000,34  
(10):130-133

[14] 侯少毅. 混合驱动机构构型综合及优化设计研究[硕  
士学位论文][D]. 重庆:重庆大学, 2008. 37-42

[15] 张春林,赵自强. 高等机构学[M]. 北京:机械工业出  
版社,2015. 68-69

# Motion analysis of RRPRR five bar mechanism driven by double rotation

Wang Dengke, Yin Mingfu, Sun Huilai, Zhao Zhenghong  
(College of Mechanical Engineering, Tianjin Polytechnic University, Tianjin 300387)

### Abstract

The RRPRR slide five bar mechanism is chosen as the research object in this paper, and the motion models under the ordinary double rotation drive are established by using methods of vector analysis and matrix calculation respectively. The results show that two methods have the same accuracy. From the view of the computation load and the expression format of the results, the matrix calculation method has the advantages of low computation cost and easiness for programming. Considering that the mechanism shows unique dynamic characteristics in different parameters, the motion output trajectory and output speed are studied under different rod lengths matching and different transfer rates of the five bar mechanism. The analysis of the experiment results shows that adjusting the matching length of the two drive rod, the length of the rack, and the transmission ratio can change the shape of the output track area, and leads to the increase of velocity fluctuation. The analysis of the parameters of the mechanism can provide reference for the relevant engineering designers.

**Key words:** linkage, dual drive, matrix operations, motion analysis