

时变时延网络系统的滑模控制器研究^①

金 澄^② 刘 斌

(武汉科技大学冶金自动化与检测技术教育部工程研究中心 武汉 430081)

摘 要 针对网络控制系统中普遍存在的随机时变时延问题,提出了保证系统渐进稳定的滑模控制方法。通过引入一种能够补偿时变时延的滑模面,在满足可达性条件的前提下得出控制器,并且推导出易于分析的系统滑动模态。然后基于 Lyapunov 稳定性理论和线性矩阵不等式方法,在设计系统参数的同时证明了系统的渐进稳定性。接着分析了时延变化范围对稳定性的影响,得出保证网络控制系统稳定的最大允许时延上界。最后应用本文提出的方法完成了一组仿真实验,仿真结果表明该控制器能使时变时延网络系统较快地稳定下来,并且可以通过改变滑模参数得到更好的控制性能。

关键词 网络控制系统(NCS), 时变时延, 滑模控制, Lyapunov 稳定性

0 引 言

通过实时网络实现闭环的反馈控制系统称为网络控制系统(networked control systems, NCSs)^[1]。它是空间分布式系统,其中控制系统组件(传感器,控制器,执行器等)通过共享的通信网络交换信息(参考输入,设备输出,控制输入等)^[2]。与传统的点对点控制相比,NCSs 的优点很多,包括成本低、重量轻、功率要求低、安装维护简单、可靠性高^[3]等。因为这些优点以及网络的飞速发展和普及,近年来 NCSs 引起了学者们进行理论分析的极大兴趣,并被广泛应用于过程控制、远程控制、遥操作等领域,而且在机器人、车辆、飞机和航天器等方面具有较大的应用潜力^[4]。

另一方面,在控制回路中引入通信网络,也给分析和设计网络控制系统带来了新的挑战,其中主要问题就是网络时延。众所周知,时延的出现会降低闭环控制系统的稳定性和控制性能,许多研究人员,已经对存在网络时延情况下 NCSs 的控制器设计、

稳定性和性能等方面进行了深入的研究^[5-7]。在文献[8]中,通过求解线性矩阵不等式(linear matrix inequality, LMI)来进行系统的设计,考虑存在网络时延和数据包丢失的情况下 NCSs 的模型,设计出状态反馈控制器。文献[9]为网络控制系统提出了一种新的事件触发方案,基于事件触发控制器,针对延迟系统模型,导出了范数有界的稳定性判据以及反馈增益和触发参数设计的准则。最近,对于存在时变时延的网络控制系统,在证明其稳定性时经常使用一种名为“reciprocally convex approach”的方法,用于合理地放缩矩阵不等式,从而更好地设计系统参数,该方法可见于文献[10]、[11]和[12]中。

滑模变结构控制(sliding mode control, SMC)方法采用不连续的控制律,能够根据系统当前的状态改变系统结构,迫使系统状态在某个动态性能有更好的滑动模态运动。SMC 有许多优点,如鲁棒性强、响应快速、易于物理实现、无需在线辨识等^[13]。文献[14]给出了一个具有扰动补偿器的离散趋近律,利用所提出的趋近律设计出滑模控制器,并且详尽描述了具有不确定性的离散滑模控制系统的动态

① 国家自然科学基金(61104027)和冶金工业过程系统科学湖北省重点实验室开放基金(Z201702)资助项目。

② 男,1994 年生,硕士生;研究方向:网络控制系统,滑模控制;联系人,E-mail: 1360772212@qq.com
(收稿日期:2018-05-06)

特性,包括系统状态轨迹收敛到滑模区的时间、滑模区的边界等。在文献[15]中,针对存在不确定性和外部扰动的离散系统,提出了不同于极点配置、最优二次型等方法。Argha 等人^[16]提出了一种新的基于 LMI 的滑模设计方案,并创新性地获得了系统状态的最终界限。然而,网络时延的存在使得 SMC 更加复杂,设计变结构控制器时如不考虑时延,会导致抖动过于剧烈,时延较大时还会使系统不稳定。近年来,一些学者对时延系统的滑模控制开展了研究^[17-19]。在文献[20]中,针对具有不确定性的多输入离散时延系统,提出了一种准滑模控制算法,能够处理存在状态时延和输入时延的系统。文献[21]讨论了多智能体系统(multi-agent system)分别存在单时延或多时延情况下,相应滑模面和控制律的设计,并利用 Lyapunov 函数证明了滑模面的鲁棒稳定性,最后还把算法应用到实际的智能体系统中。在文献[22]中,通过构造一个能够补偿时延的滑模面,提出一种具有指数趋近律的滑模控制方法,使带时延的 NCSs 稳定化。需要注意的是,该文中考虑的时延是固定的。

本文考虑更具一般性的随机时变时延 NCSs,引入一种能够补偿时变时延的滑模面,证明滑模面的可达性,以此得到控制律。然后应用 Lyapunov 方法证明了系统滑动模态的渐进稳定性,并且分析了时延变化范围对系统稳定性的影响。由于采用滑模控制,还能通过改变滑模参数,在提高系统响应速度的同时削弱抖动。本文完成的仿真实验证明了该方法的有效性。

1 NCSs 模型及相关引理

本文考虑多输入多输出连续系统,在信息的交互中,考虑控制器和执行器之间通过网络相互连接,它们之间具有网络诱导时延,而传感器与控制器点对点相连。如图 1 所示。

假定传感器和控制器为时间驱动,执行器为事件驱动,并且网络时延 $\tau(t)$ 是有界的,则系统的状态模型可以描述为

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t - \tau(t)) \quad (1)$$

其中, $\mathbf{A}$ 为 $m \times m$ 阶矩阵, $\mathbf{B}$ 为 $m \times n$ 阶列满秩矩阵,即 $\text{rank}(\mathbf{B}) = n$ 。而 $\tau(t)$ 是网络上的可变时延,并且有 $\tau(t) \in [\tau_1, \tau_2]$ 。

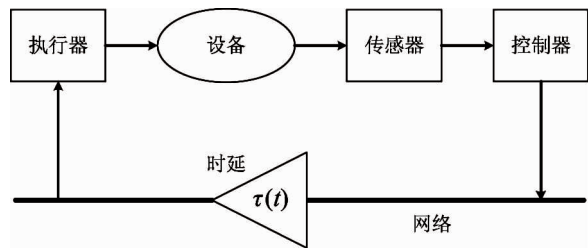


图 1 时变时延网络控制系统的模型

在后文的推导证明中,需要用到下面这些引理。

引理 1 (Jensen's inequality) 对于任意对称正定矩阵 $\mathbf{R}$, 有以下积分不等式成立:

$$h(t) \int_{t-h(t)}^t \dot{\mathbf{x}}^T(s) \mathbf{R} \dot{\mathbf{x}}(s) ds \geq \boldsymbol{\zeta}^T(t) \begin{bmatrix} \mathbf{R} & * \\ -\mathbf{R} & \mathbf{R} \end{bmatrix} \boldsymbol{\zeta}(t)$$

其中, $\boldsymbol{\zeta}(t) = [\mathbf{x}^T(t) \quad \mathbf{x}^T(t-h(t))]^T$ 。

引理 2 (Reciprocally convex approach) 假设 $f_1, f_2, \dots, f_N: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ 在开集 D 的子集中有正值, $D \in \mathbb{R}^m$ 。那么在集合 D 中 f_i 的相互组合满足:

$$\min_{|\alpha_i| \alpha_i > 0, \sum_i \alpha_i = 1} \sum_i \frac{1}{\alpha_i} f_i(t) = \sum_i f_i(t) + \max_{g_{i,j}(t) \neq j} \sum_{g_{i,j}(t) \neq j} g_{i,j}(t)$$

其中:

$$g_{i,j}: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}, g_{i,j}(t) = g_{j,i}^T(t), \begin{bmatrix} f_i(t) & g_{j,i}(t) \\ g_{i,j}(t) & f_j(t) \end{bmatrix} \geq 0。$$

引理 3 (Schur 补性质) 给定对称矩阵 $\mathbf{A}$, 对称正定矩阵 $\mathbf{C}$, 矩阵 $\mathbf{B}$, 则 $\mathbf{A} + \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B}$ 等价于:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B}^T \\ \mathbf{B} & -\mathbf{C}^{-1} \end{bmatrix} < 0$$

或

$$\begin{bmatrix} -\mathbf{C}^{-1} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B}^T & \mathbf{A} \end{bmatrix} < 0。$$

2 滑模控制器设计及稳定性分析

本节引入了一种能够补偿时变时延的滑模面,设计控制器,且保证系统状态在有限时间内到达滑模面;然后用 Lyapunov 方法证明了系统的稳定性。

2.1 滑模函数和控制器的设计

首先,设计滑模函数为

$$S(t) = Cx(t) - \int C(A - BK)x(t)dt + \int CB[u(t) - u(t - \tau(t))]dt \quad (2)$$

其中, C 是适当维数的常数矩阵,并且能保证 CB 是非奇异矩阵。因为矩阵 B 为列满秩矩阵,所以必定存在满足条件的矩阵 C 。另外, $-\int C(A - BK)x(t)dt$ 为滑模补偿器部分,其中的 K 为待设计的参数。

同时,设置如下的指数趋近律:

$$\dot{S} = -\eta S - \varepsilon \operatorname{sgn} S \quad (3)$$

其中, η, ε 是常数标量,且 $\eta > 0, \varepsilon > 0$ 。增大 η 可以缩短趋近时间,从而增加系统的快速性;减小 ε 可以削弱抖振。由式(3)可知:

$$S^T \dot{S} = S^T (-\eta S - \varepsilon \operatorname{sgn} S) < -S^T \varepsilon \operatorname{sgn} S < 0,$$

因而满足滑模面的可达性条件。

设计如下控制律:

$$u(t) = u_{eq} + u_n \quad (4)$$

其中, u_{eq} 为系统的等效控制部分, u_n 为切换控制部分。由式(1)和式(2)可得:

$$\begin{aligned} \dot{S}(t) &= C\dot{x}(t) - CAx(t) + CBKx(t) + CBu(t) \\ &\quad - CBu(t - \tau(t)) \\ &= CBu(t) + CBKx(t) \end{aligned} \quad (5)$$

可以看出,采用式(2)的滑模函数,微分之后消去了含 $u(t - \tau(t))$ 的项。取 $\dot{S}(t) = 0$, 由式(5)可以求得等效控制项为

$$u_{eq} = -Kx(t) \quad (6)$$

结合式(3)和(5)可得控制律为

$$u = -Kx(t) - (CB)^{-1}(\eta S + \varepsilon \operatorname{sgn} S) \quad (7)$$

由式(6)可知,控制律(7)中的切换控制部分为 $u_n = -(CB)^{-1}(\eta S + \varepsilon \operatorname{sgn} S)$ 。

把式(6)代入式(1),系统处于滑模面时的状态方程可以描述为

$$\dot{x}(t) = Ax(t) - BKx(t - \tau(t)) \quad (8)$$

2.2 滑模面的稳定性分析

由于系统已经满足滑模面的可达性条件,为了保证系统的稳定性,只需要设计合适的矩阵,使式(8)描述的滑动模态稳定。

定理 1 针对系统(1),已知标量 $\tau_1, \tau_2 (\tau_2 > \tau_1 > 0)$, 如果存在矩阵 $\tilde{K}$ 和对称正定矩阵 $\tilde{P}, \tilde{Q}_1, \tilde{Q}_2, \tilde{M}_1, \tilde{M}_2$, 以及矩阵 $\tilde{N}$, 满足以下矩阵不等式,则由式(8)描述的系统滑动模态是渐进稳定的。

$$\begin{bmatrix} \Omega_{11} & * \\ \Omega_{21} & \Omega_{22} \end{bmatrix} < 0 \quad (9)$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{M}_2 & \tilde{N}^T \\ \tilde{N} & \tilde{M}_2 \end{bmatrix} > 0 \quad (10)$$

其中,

$$\Omega_{11} = \begin{bmatrix} \tilde{X} & * & * & * \\ \tilde{M}_1 & \tilde{Y} & * & * \\ -\tilde{K}^T B^T & \tilde{M}_2 - \tilde{N} & \tilde{Z} & * \\ 0 & \tilde{N} & \tilde{M}_2 - \tilde{N} & -\tilde{Q}_2 - \tilde{M}_2 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{X} = A\tilde{P} + \tilde{P}A^T + \tilde{Q}_1 - \tilde{M}_1, \tilde{Y} = \tilde{Q}_1 - \tilde{Q}_2 - \tilde{M}_1 - \tilde{M}_2$$

$$\tilde{Z} = \tilde{N} + \tilde{N}^T - 2\tilde{M}_2$$

$$\Omega_{21} = \begin{bmatrix} \tau_1 A\tilde{P} & 0 & -\tau_1 B\tilde{K} & 0 \\ (\tau_2 - \tau_1)A\tilde{P} & 0 & -(\tau_2 - \tau_1)B\tilde{K} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Omega_{22} = \begin{bmatrix} -2\tilde{P} + \tilde{M}_1 & 0 \\ 0 & -2\tilde{P} + \tilde{M}_2 \end{bmatrix}$$

并且 $\tilde{K} = K\tilde{P}$ 。

证明 对式(8)描述的系统滑动模态,构建 Lyapunov-Krasovskii 函数为 $V(t) = \sum_{i=1}^3 V_i(t), t \in \Omega_n$ 。

其中:

$$V_1(t) = x^T(t)Px(t),$$

$$V_2(t) = \int_{t-\tau_1}^t x^T(s)Q_1x(s)ds + \int_{t-\tau_2}^{t-\tau_1} x^T(s)Q_2x(s)ds,$$

$$\begin{aligned} V_3(t) &= \tau_1 \int_{t-\tau_1}^t \int_s^t \dot{x}^T(v)M_1\dot{x}(v)dvds \\ &\quad + (\tau_2 - \tau_1) \int_{t-\tau_2}^{t-\tau_1} \int_s^t \dot{x}^T(v)M_2\dot{x}(v)dvds, \end{aligned}$$

且 P, Q_1, Q_2, M_1, M_2 是正定矩阵。

求导可得:

$$\dot{V}(t) = \sum_{i=1}^3 \dot{V}_i(t), t \in \Omega_n \quad (11)$$

其中,

$$\dot{V}_1(t) = \dot{x}^T(t)Px(t) + x^T(t)P\dot{x}(t)$$

$$\begin{aligned} \dot{V}_2(t) &= x^T(t)Q_1x(t) + x^T(t - \tau_1)(Q_2 - Q_1)x(t - \tau_1) \\ &\quad - x^T(t - \tau_2)Q_2x(t - \tau_2), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{V}_3(t) = & \tau_1^2 \dot{\mathbf{x}}^T(t) \mathbf{M}_1 \dot{\mathbf{x}}(t) + (\tau_2 - \tau_1)^2 \dot{\mathbf{x}}^T(t) \mathbf{M}_2 \dot{\mathbf{x}}(t) \\ & - \tau_1 \int_{t-\tau_1}^t \dot{\mathbf{x}}^T(s) \mathbf{M}_1 \dot{\mathbf{x}}(s) ds \\ & - (\tau_2 - \tau_1) \int_{t-\tau_2}^{t-\tau_1} \dot{\mathbf{x}}^T(s) \mathbf{M}_2 \dot{\mathbf{x}}(s) ds. \end{aligned}$$

把式(8)代入式(11),运用引理1和引理2,并且令 $\zeta(t) = [\mathbf{x}^T(t) \quad \mathbf{x}^T(t - \tau_1) \quad \mathbf{x}^T(t - \tau(t)) \quad \mathbf{x}^T(t - \tau_2)]^T$, 可得 $\dot{V}(t) \leq \zeta^T(t) \Phi \zeta(t)$,

$$\Phi = \begin{bmatrix} \Phi_{11} & * & * & * \\ \mathbf{M}_1 & \mathbf{Q}_2 - \mathbf{Q}_1 - \mathbf{M}_1 - \mathbf{M}_2 & * & * \\ \Phi_{31} & \mathbf{M}_2 - \mathbf{N} & \Phi_{33} & * \\ 0 & \mathbf{N} & \mathbf{M}_2 - \mathbf{N} & -\mathbf{Q}_2 - \mathbf{M}_2 \end{bmatrix} \quad (12)$$

其中,

$$\begin{aligned} \Phi_{11} = & \mathbf{P}\mathbf{A} + \mathbf{A}^T\mathbf{P} + \mathbf{Q}_1 - \mathbf{M}_1 + \tau_1^2 \mathbf{A}^T \mathbf{M}_1 \mathbf{A} \\ & + (\tau_2 - \tau_1)^2 \mathbf{A}^T \mathbf{M}_2 \mathbf{A}, \\ \Phi_{31} = & -(\mathbf{B}\mathbf{K})^T \mathbf{P} - \tau_1^2 (\mathbf{B}\mathbf{K})^T \mathbf{M}_1 \mathbf{A} \\ & - (\tau_2 - \tau_1)^2 (\mathbf{B}\mathbf{K})^T \mathbf{M}_2 \mathbf{A}, \\ \Phi_{33} = & \tau_1^2 (\mathbf{B}\mathbf{K})^T \mathbf{M}_1 \mathbf{B}\mathbf{K} + (\tau_2 - \tau_1)^2 (\mathbf{B}\mathbf{K})^T \mathbf{M}_2 \mathbf{B}\mathbf{K} \\ & + \mathbf{N} + \mathbf{N}^T - 2\mathbf{M}_2, \end{aligned}$$

同时,矩阵 $\mathbf{N}$ 必须满足矩阵不等式:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_2 & \mathbf{N}^T \\ \mathbf{N} & \mathbf{M}_2 \end{bmatrix} > 0 \quad (13)$$

由 $\dot{V}(t) < 0$ 可知,必有 $\Phi < 0$, 对其运用引理3可得:

$$\Phi = \begin{bmatrix} \Gamma_{11} & \Gamma_{12} \\ \Gamma_{21} & \Gamma_{22} \end{bmatrix} < 0 \quad (14)$$

其中,

$$\Gamma_{11} = \begin{bmatrix} \mathbf{X} & * & * & * \\ \mathbf{M}_1 & \mathbf{Y} & * & * \\ -(\mathbf{B}\mathbf{K})^T \mathbf{P} & \mathbf{M}_2 - \mathbf{N} & \mathbf{Z} & * \\ 0 & \mathbf{N} & \mathbf{M}_2 - \mathbf{N} & -\mathbf{Q}_2 - \mathbf{M}_2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{X} = \mathbf{P}\mathbf{A} + \mathbf{A}^T\mathbf{P} + \mathbf{Q}_1 - \mathbf{M}_1, \mathbf{Y} = \mathbf{Q}_2 - \mathbf{Q}_1 - \mathbf{M}_1 - \mathbf{M}_2$$

$$\mathbf{Z} = \mathbf{N} + \mathbf{N}^T - 2\mathbf{M}_2$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{21} = & \Gamma_{12}^T \\ = & \begin{bmatrix} \tau_1 \mathbf{M}_1 \mathbf{A} & 0 & -\tau_1 \mathbf{M}_1 \mathbf{B}\mathbf{K} & 0 \\ (\tau_2 - \tau_1) \mathbf{M}_2 \mathbf{A} & 0 & -(\tau_2 - \tau_1) \mathbf{M}_2 \mathbf{B}\mathbf{K} & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\Gamma_{22} = \begin{bmatrix} -\mathbf{M}_1 & 0 \\ 0 & -\mathbf{M}_2 \end{bmatrix}$$

并且 $\mathbf{P}, \mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2, \mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2$ 都为对称正定矩阵。

对式(14)左乘右乘以下矩阵:

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \mathbf{P}^{-1} & & & \\ & \mathbf{P}^{-1} & & \\ & & \mathbf{P}^{-1} & \\ & & & \mathbf{M}_1^{-1} \\ & & & & \mathbf{M}_2^{-1} \end{bmatrix} \quad (15)$$

同时,令 $\tilde{\mathbf{K}} = \mathbf{K}\mathbf{P}^{-1}, \tilde{\mathbf{P}} = \mathbf{P}^{-1}, \tilde{\mathbf{Q}}_1 = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{Q}_1\mathbf{P}^{-1}, \tilde{\mathbf{Q}}_2 = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{Q}_2\mathbf{P}^{-1}, \tilde{\mathbf{M}}_1 = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{M}_1\mathbf{P}^{-1}, \tilde{\mathbf{M}}_2 = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{M}_2\mathbf{P}^{-1}, \tilde{\mathbf{N}} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{N}\mathbf{P}^{-1}$, 可得:

$$\tilde{\Phi} = \Lambda \Phi \Lambda = \begin{bmatrix} \tilde{\Gamma}_{11} & * \\ \tilde{\Gamma}_{21} & \tilde{\Gamma}_{22} \end{bmatrix} < 0 \quad (16)$$

其中,

$$\tilde{\Gamma}_{11} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{X}} & * & * & * \\ \tilde{\mathbf{M}}_1 & \tilde{\mathbf{Y}} & * & * \\ -\tilde{\mathbf{K}}^T \tilde{\mathbf{B}}^T & \tilde{\mathbf{M}}_2 - \tilde{\mathbf{N}} & \tilde{\mathbf{Z}} & * \\ 0 & \tilde{\mathbf{N}} & \tilde{\mathbf{M}}_2 - \tilde{\mathbf{N}} & -\tilde{\mathbf{Q}}_2 - \tilde{\mathbf{M}}_2 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{\mathbf{X}} = \mathbf{A}\tilde{\mathbf{P}} + \tilde{\mathbf{P}}\mathbf{A}^T + \tilde{\mathbf{Q}}_1 - \tilde{\mathbf{M}}_1, \tilde{\mathbf{Y}} = \tilde{\mathbf{Q}}_1 - \tilde{\mathbf{Q}}_2 - \tilde{\mathbf{M}}_1 - \tilde{\mathbf{M}}_2$$

$$\tilde{\mathbf{Z}} = \tilde{\mathbf{N}} + \tilde{\mathbf{N}}^T - 2\tilde{\mathbf{M}}_2$$

$$\tilde{\Gamma}_{21} = \begin{bmatrix} \tau_1 \mathbf{A}\tilde{\mathbf{P}} & 0 & -\tau_1 \mathbf{B}\tilde{\mathbf{K}} & 0 \\ (\tau_2 - \tau_1) \mathbf{A}\tilde{\mathbf{P}} & 0 & -(\tau_2 - \tau_1) \mathbf{B}\tilde{\mathbf{K}} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{\Gamma}_{22} = \begin{bmatrix} -\mathbf{M}_1^{-1} & 0 \\ 0 & -\mathbf{M}_2^{-1} \end{bmatrix}.$$

对于对称正定矩阵 $\mathbf{P}, \mathbf{M}_1$, 有:

$$\mathbf{P}\mathbf{M}_1^{-1}\mathbf{P} - 2\mathbf{P} + \mathbf{M}_1 = (\mathbf{P} - \mathbf{M}_1)\mathbf{M}_1^{-1}(\mathbf{P} - \mathbf{M}_1) \geq 0,$$

进一步可得:

$$-\mathbf{M}_1^{-1} \leq -2\mathbf{P}^{-1} + \mathbf{P}^{-1}\mathbf{M}\mathbf{P}^{-1},$$

$$\text{即 } -\mathbf{M}_1^{-1} \leq -2\tilde{\mathbf{P}} + \tilde{\mathbf{M}}_1.$$

因此,有下式成立:

$$\tilde{\Gamma}_{22} \leq \begin{bmatrix} -2\tilde{\mathbf{P}} + \tilde{\mathbf{M}}_1 & 0 \\ 0 & -2\tilde{\mathbf{P}} + \tilde{\mathbf{M}}_2 \end{bmatrix} \quad (17)$$

将式(17)代入式(16),则式(9)得证。

另一方面,矩阵 $\mathbf{N}$ 满足式(13),即

$$\begin{bmatrix} M_2 & N^T \\ N & M_2 \end{bmatrix} > 0, \text{ 故有:}$$

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} P^{-1} & \\ & P^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_2 & N^T \\ N & M_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P^{-1} & \\ & P^{-1} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} P^{-1} M_2 P^{-1} & P^{-1} N^T P^{-1} \\ P^{-1} N P^{-1} & P^{-1} M_2 P^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{M}_2 & \tilde{N}^T \\ \tilde{N} & \tilde{M}_2 \end{bmatrix} > 0 \end{aligned}$$

式(10)得证。

因此,当矩阵不等式(9)、(10)成立时, Lyapunov-Krasovskii 函数 $V(t)$ 正定,而 $\dot{V}(t)$ 负定,即滑动模态是渐进稳定的。

3 时变时延对系统稳定性的影响

定理 2 如果存在正定矩阵 R 和 S 以及标量 $\gamma_1, \gamma_2 > 1$, 满足以下矩阵不等式,则由式(8)描述的滑动模态是渐进稳定的。

$$\begin{aligned} & -\lambda_{\min}(S) - 2\lambda_{\min}(RBK) + 2\tau_2\gamma_1 \|RBKA\| \\ & + 2\tau_2\gamma_1\gamma_2 \|RBKBK\| < 0 \end{aligned} \quad (18)$$

其中, $RA + A^T R = -S, \tau_2$ 为时变时延 $\tau(t)$ 的上界。

证明 选取 Lyapunov 函数为 $V = x^T(t)Rx(t)$, 其中 R 为正定矩阵。可以得到:

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \dot{x}^T(t)Rx(t) + x^T(t)R\dot{x}(t) \\ &= [Ax(t) - BKx(t - \tau(t))]^T Rx(t) \\ & \quad + x^T(t)R[Ax(t) - BKx(t - \tau(t))] \\ &= x^T(t)(A^T R + RA)x(t) - 2x^T(t)RBKx(t - \tau(t)) \\ &= -x^T(t)Sx(t) - 2x^T(t)RBKx(t) \\ & \quad + 2x^T(t)RBK \int_{t-\tau(t)}^t \dot{x}(s) ds \end{aligned} \quad (19)$$

其中, $RA + A^T R = -S$ 。进一步可得:

$$\begin{aligned} & 2x^T(t)RBK \int_{t-\tau(t)}^t \dot{x}(s) ds \\ &= 2x^T(t)RBK \int_{t-\tau(t)}^t [Ax(s) - BKx(s - \tau(t))] ds \\ &= 2x^T(t)RBK \int_{t-\tau(t)}^t Ax(s) ds \\ & \quad - 2x^T(t)RBK \int_{t-\tau(t)}^t BKx(s - \tau(t)) ds \end{aligned} \quad (20)$$

对式(20)应用积分中值定理,可得:

$$2x^T(t)RBK \int_{t-\tau(t)}^t \dot{x}(s) ds = 2x^T(t)RBK\tau(t)Ax(\alpha)$$

$$- 2x^T(t)RBK\tau(t)BKx(\beta - \tau(t)) \quad (21)$$

其中 $t - \tau(t) \leq \alpha \leq t, t - \tau(t) \leq \beta \leq t$ 。结合式(19)和式(21)则有:

$$\begin{aligned} \dot{V} &\leq -\lambda_{\min}(S) \|x(t)\|^2 - 2\lambda_{\min}(RBK) \|x(t)\|^2 \\ & \quad + \|2x^T(t)RBK\tau(t)Ax(\alpha)\| \\ & \quad + \|2x^T(t)RBK\tau(t)BKx(\beta - \tau(t))\| \end{aligned} \quad (22)$$

应用 Razumikhin 定理,对于任意实数 $\gamma_1, \gamma_2 > 1$, 如果有 $t - \tau(t) \leq \alpha \leq t$, 那么 $\|x(\alpha)\| < \gamma_1 \|x(t)\|$; 而如果有 $t - \tau(t) \leq \beta \leq t$, 那么 $\|x(\beta - \tau(t))\| < \gamma_2 \|x(t - \tau(t))\| < \gamma_1\gamma_2 \|x(t)\|$ 。

又由于 $\tau_1 \leq \tau(t) \leq \tau_2$, 则有:

$$\begin{aligned} & \|2x^T(t)RBK\tau(t)Ax(\alpha)\| \\ & \leq 2\tau_2 \|RBKA\| \cdot \|x(t)\| \cdot \|x(\alpha)\| \\ & < 2\tau_2\gamma_1 \|RBKA\| \cdot \|x(t)\|^2 \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} & \|2x^T(t)RBK\tau(t)BKx(\beta - \tau(t))\| \\ & \leq 2\tau_2 \|RBKBK\| \cdot \|x(t)\| \cdot \|x(\beta - \tau(t))\| \\ & < 2\tau_2\gamma_1\gamma_2 \|RBKBK\| \cdot \|x(t)\|^2 \end{aligned} \quad (24)$$

结合式(22-24)有:

$$\begin{aligned} \dot{V} &< -\lambda_{\min}(S) \|x(t)\|^2 - 2\lambda_{\min}(RBK) \|x(t)\|^2 \\ & \quad + 2\tau_2\gamma_1 \|RBKA\| \cdot \|x(t)\|^2 \\ & \quad + 2\tau_2\gamma_1\gamma_2 \|RBKBK\| \cdot \|x(t)\|^2 \end{aligned} \quad (25)$$

要使 $\dot{V} < 0$, 由式(25)可知必有式(18)成立。也就是说当矩阵不等式(18)成立时,由式(8)描述的滑动模态是渐进稳定的,即该网络控制系统渐进稳定。由式(18)可以得到时变时延 $\tau(t)$ 的上界应该满足:

$$\tau_2 < \frac{\lambda_{\min}(S) + 2\lambda_{\min}(RBK)}{2\gamma_1(\|RBKA\| + \gamma_2\|RBKBK\|)} \quad (26)$$

4 数值仿真

考虑参考文献[22]中的状态空间模型,并且引入时变时延:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} -3.3 & 0 \\ 33.3 & -33.3 \end{bmatrix} x(t) \\ & \quad + \begin{bmatrix} 3.3 \\ 0 \end{bmatrix} u(t - \tau(t)) \end{aligned}$$

假定随机时变时延 $\tau(t) \in [0.1, 0.4]$, 滑模控制器等效控制部分 $u_{eq} = -Kx(t)$, 由定理 1 可得控制器参数矩阵 K 为: $K = [-0.0411 \quad 0.0132]$ 。

设置 $\gamma_1 = 1.05, \gamma_2 = 1.1, S = \begin{bmatrix} 13.08 & 0.66 \\ 0.66 & 13.32 \end{bmatrix}$,

根据定理 2 可得该系统的最大允许时延上界为 $\max(\tau_2) = 0.618$ 。显然所假定的时延范围满足此要求。

设置参数 $C = [0.3 \quad 0]$, 系统的初始状态为 $x_0 = [1 \quad 3]^T$ 。设置滑模参数 $\eta = 1, \varepsilon = 0.005$, 对该网络控制系统进行仿真实验, 结果如图 2 所示。

由图 2 的仿真结果可以看出, 使用该方法设计出的滑模控制器, 能使时变时延网络控制系统较快地收敛到稳定状态。为了进一步分析滑模参数对系

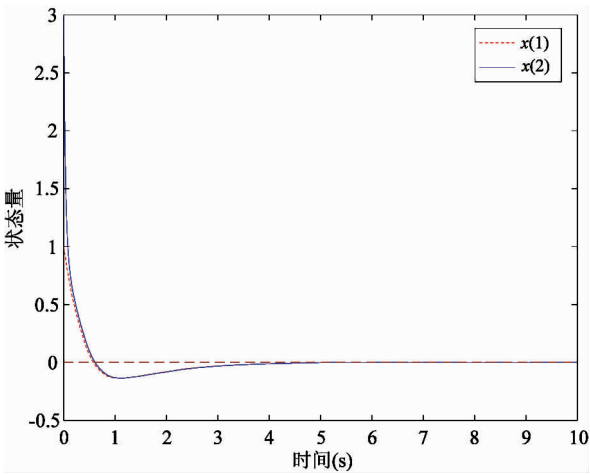
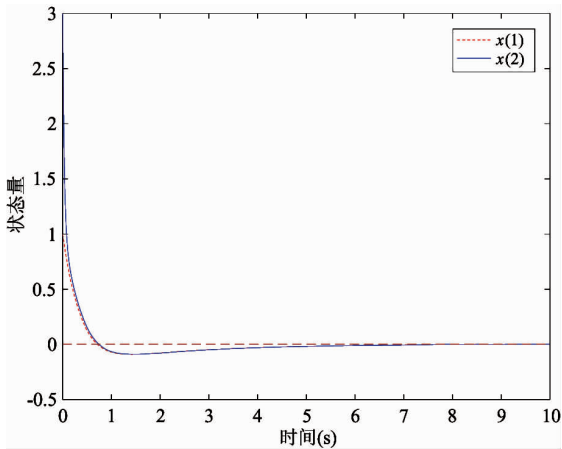
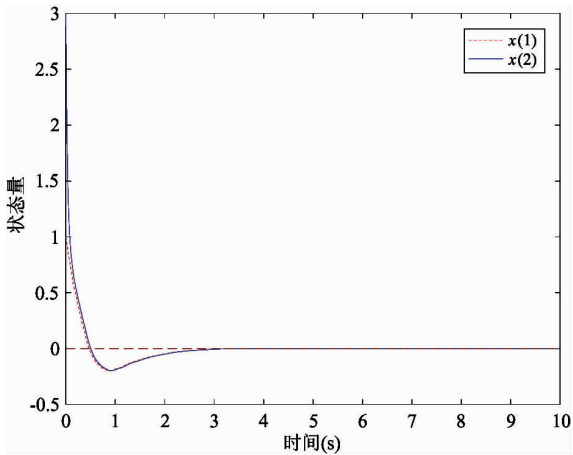


图 2 $\eta=1$ 和 $\varepsilon=0.005$ 时的仿真结果

统控制性能的影响, 接下来分别选用不同的滑模参数 η 和 ε 进行仿真实验对比, 如图 3 和图 4 所示。

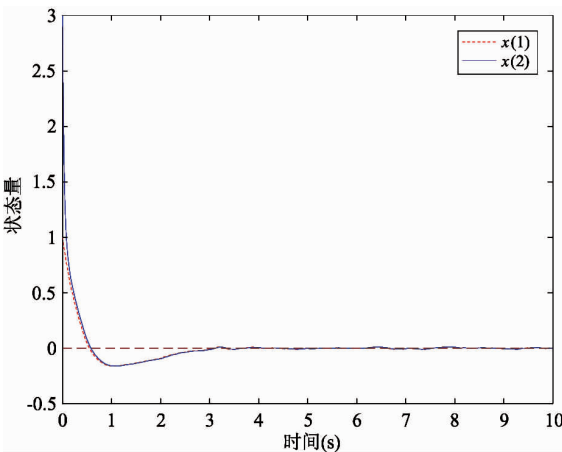


(a) $\eta = 0.5$ 和 $\varepsilon = 0.005$ 时的仿真结果

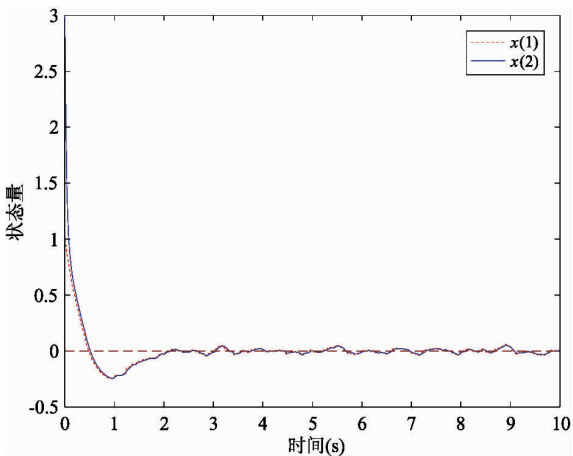


(b) $\eta = 2$ 和 $\varepsilon = 0.005$ 时的仿真结果

图 3 参数 η 的变化对控制性能的影响



(a) $\eta = 1$ 和 $\varepsilon = 0.05$ 时的仿真结果



(b) $\eta = 1$ 和 $\varepsilon = 0.2$ 时的仿真结果

图 4 参数 ε 的变化对控制性能的影响

对比图 2 和图 3 中的仿真结果可以看出,增大 η 可以提高系统响应速度,使网络控制系统更快地趋于稳定状态;对比图 2 和图 4 中的仿真结果可以看出,减小 ε 可以削弱抖振,增加系统的稳定性。

5 结 论

本文研究了随机时变时延网络系统滑模控制器的设计问题。首先,针对存在随机时变时延的网络控制系统模型,设计了特殊的滑模面并得到控制器。然后使用 Lyapunov 理论和 LMI 方法证明了系统的渐进稳定性,同时设计出控制器参数,并分析了系统允许的最大时延范围。最后完成了一组仿真实验,证明了该方法的有效性。与一般的状态反馈控制器不同,该控制器增加了滑模参数选取,因此在保证稳定性的前提下,可以尽量提高控制性能。这种滑模控制器的设计思路,能否用来解决时延网络控制系统的跟踪控制问题,是需要进一步思考的课题。

参考文献

[1] 游科友, 谢立华. 网络控制系统的最新研究综述[J]. 自动化学报, 2013, 39(2):101-118

[2] Hespanha J P, Naghshtabrizi P, Xu Y. A survey of recent results in networked control systems[J]. *Proceedings of the IEEE*, 2007, 95(1):138-162

[3] 刘斌, 刘义才. 区间化时变时延的网络化切换系统建模与控制[J]. 控制理论与应用, 2017, 34(7):912-920

[4] Gao Y, Liu J, Li H, et al. Event-triggered sliding mode control of stochastic systems over networks[C]. In: Proceedings of the 35th Chinese Control Conference, Chengdu, China, 2016. 3363-3368

[5] Garcia E, Antsaklis P J. Model-based event-triggered control for systems with quantization and time-varying network delays[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2013, 58(2):422-434

[6] Chen J, Lin C, Guo R, et al. Networked control method for polynomial systems via state feedback control[C]. In: Proceedings of the 2017 Chinese Automation Congress, Jinan, China, 2017. 908-911

[7] Li T, Zhang L, Li Z, et al. Adaptive event-triggered out-

put feedback control of networked control systems[C]. In: Proceedings of the 8th International Conference on Intelligent Control and Information Processing, Hangzhou, China, 2017. 237-242

[8] Yue D, Han Q L, Peng C. State feedback controller design of networked control systems[J]. *IEEE Transactions on Circuits & Systems II Express Briefs*, 2004, 51(11):640-644

[9] Yue D, Tian E, Han Q L. A delay system method for designing event-triggered controllers of networked control systems[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2013, 58(2):475-481

[10] Xiao S, Cheng W, Zeng H, et al. Further results on stability of networked control systems with randomly varying delay and missing measurements[C]. In: Proceeding of the 3rd International Conference on Intelligent System Design and Engineering Applications, Hong Kong, China, 2013. 787-790

[11] Li C, Qiu F. Second-order reciprocally convex approach for stability of neural networks with interval time-varying delays[C]. In: Proceedings of the 29th Chinese Control and Decision Conference, Chongqing, China, 2017. 4271-4277

[12] Cheng W, Xiao S, Zeng H, et al. Reciprocally convex approach to H_{∞} control for linear systems with interval time-varying delay[C]. In: Proceedings of the 24th Chinese Control and Decision Conference, Taiyuan, China, 2012. 363-368

[13] 刘金琨. 滑模变结构控制 MATLAB 仿真[M]. 北京: 清华大学出版社, 2015

[14] Qu S, Xia X, Zhang J. Dynamics of discrete-time sliding-mode-control uncertain systems with a disturbance compensator[J]. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 2014, 61(7):3502-3510

[15] Argha A, Li L, Su S W, et al. On LMI-based sliding mode control for uncertain discrete-time systems[J]. *Journal of the Franklin Institute*, 2016, 353(15):3857-3875

[16] Yao H, Yuan F, Qiao Y. Variable structure guaranteed cost control for uncertain networked systems with time delay[C]. In: Proceedings of the 29th Chinese Control Conference, Beijing, China, 2010. 4351 - 4354

[17] Han S Y, Chen Y H, Wang L, et al. Sliding mode con-

- trol for state delayed systems subject to persistent disturbance[C]. In: Proceedings of the IEEE International Conference on Systems, Man, and Cybernetics, Budapest, Hungary, 2016. 871-874
- [18] Zhou X, Yan H, Peng C, et al. Sliding mode estimation-based control for stochastic time delays in networked micogrid[C]. In: Proceedings of the 36th Chinese Control Conference, Dalian, China, 2017. 7938-7943
- [19] Yassine B Y, Nouri A S, Mehdi D. A new sliding mode approach for discrete systems with state and input time delays[C]. In: Proceedings of the 17th International Conference on Sciences and Techniques of Automatic Control and Computer Engineering, Sousse, Tunisia, 2017. 723-728
- [20] Janardhanan S, Bandyopadhyay B, Thakar V K. Discrete-time output feedback sliding mode control for time-delay systems with uncertainty[C]. In: Proceedings of the IEEE International Conference on Control Applications, Taipei, China, 2004. 1358-1363
- [21] Zhang J, Ming L, Shen T, et al. Sliding mode control for a class of nonlinear multi-agent system with time-delay and uncertainties[J]. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 2018, 65(1):865-875
- [22] Fang L, Wu Z, Liu J, et al. Sliding mode variable structure control of networked control system[C]. In: Proceedings of the IEEE International Conference on Automation and Logistics, Jinan, China, 2007. 2660-2664

Research of sliding mode controller for networked systems with time-varying delay

Jin Cheng, Liu Bin

(Engineering Research Center for Metallurgical Automation and Detecting Technology of Ministry of Education,
Wuhan University of Science and Technology, Wuhan 430081)

Abstract

A sliding mode control method is proposed to ensure the asymptotical stability of networked control systems with stochastic time-varying delay. By introducing a sliding mode surface which can compensate time-varying delay, the controller is obtained while satisfying the reaching condition, and a easily analyzed sliding mode is derived. Then, the asymptotic stability of the system is proved and the system parameters are designed based on theory of Lyapunov stability and linear matrix inequalities approach. Next, the influence of delay range on system stability is analyzed. And the maximum allowable delay bound is obtained while ensuring the stability of networked control systems. Finally, a set of simulation experiments is completed by using the proposed method. The simulation results show that the controller can quickly stabilize the networked systems with time-varying delay and good control performance can be achieved by changing the sliding mode parameters.

Key words: networked control system (NCS), time-varying delay, sliding mode control, Lyapunov stability