doi:10.3772/j.issn.1002-0470.2019.02.004

自适应阈值的 1-bit 压缩感知算法①

司菁菁②* *** 许 培* *** 程银波**

(* 燕山大学信息科学与工程学院 秦皇岛 066004)

(** 河北农业大学海洋学院 秦皇岛 066003)

(*** 河北省信息传输与信号处理重点实验室 秦皇岛 066004)

摘 要 针对二进制迭代硬阈值(BIHT)算法中固定的量化阈值在一定程度上限制了该算法重构性能的问题,提出了一种基于自适应阈值的二进制迭代硬阈值(AT-BIHT)算法,用于实现可压缩信号的1-bit压缩感知(CS)采集与重构。该算法采用基于自适应阈值的二进制量化器替代了BIHT算法中的符号函数,根据已获得的重构信号为当前测量值的1-bit量化选择合适的量化阈值;在继承BIHT算法优点的基础上,有效提高了重构性能。仿真实验表明,对于随机稀疏信号和实际心电信号,AT-BIHT算法的重建性能均高于BIHT算法。

关键词 压缩感知(CS), 1-bit 压缩感知, 二进制迭代硬阈值(BIHT), 自适应阈值, 自适应二进制迭代硬阈值(AH-BIHT)

0 引 言

压缩感知(compressed sensing, CS)[1]是近年来信号获取和处理领域中发展迅速的一门理论。该理论突破了传统奈奎斯特采样定理的限制,能够以远低于奈奎斯特速率的采样率对稀疏信号或可压缩信号进行压缩测量,并通过求解优化问题实现原始信号的精确重构。

在实际系统中,为了方便传输和存储,通常需要对测量数据进行量化,即将模拟信号转化为有限精度的数字信号,因此量化压缩感知(quantized compressive sensing, QCS)[2-5]的研究使得CS理论更契合实际的信号获取与处理系统。特别地,Boufounos和Baraniuk[6]提出了一种采用极限量化的QCS框架——1-bit压缩感知(1-bit compressive sensing, 1-bit CS),对每个测量值进行1-bit量化,只保留测量值的符号信息。1-bit量化利用比较器替代了模/数转换器,极大地简化了硬件结构,提高了量化器的工作效率。此外,1-bit CS还对多种形式的噪声和非线性失真具有鲁棒性[7,8],其重构性能甚至能够超过传统的多比特压缩感知[9]。

基于这些优势,1-bit CS受到了越来越多的研究者关注。Boufounos等[6]把固定点连续(fixed point continuation, FPC)算法应用到1-bit CS框架中,获得了优于传统CS算法的重建性能。Huang等[10]将交替方向乘子法(alternating direction methods of multipliers, ADMM)应用到1-bit CS混合模型中,在矫正CT过度曝光问题中取得了较好的效果。Jacques等[11]提出了二进制迭代硬阈值(binary iteration hard thresholding, BIHT)算法。该算法具有重构性能高、一致性好、复杂度低等优势,使得BIHT及其衍生算法成为当前常用的一类1-bit CS重构算法。Yan等[12]提出了一种自适应异常值追踪(adaptive outlier pursuit, AOP)算法,能够检测符号翻转的发生并用修正的测量值恢复原始信号。文

① 国家自然科学基金(61701429, 61471313)和河北省自然科学基金(F2018203134)资助项目。

② 女,1980年生,博士,副教授;研究方向:压缩感知,网络编码等;联系人,E-mail: sjj@ysu.edu.cn

(收稿日期:2018-06-01)

献[13]提出了一种利用 pinball 损失函数的迭代硬阈值(pinball loss iterative hard thresholding, PIHT)算法，实现了原始信号在较多符号翻转情况下的重构。

然而，上述算法在 1-bit 量化过程中都是以零作为量化阈值的。在对这些算法进行仿真实验的过程中发现，当 1-bit 量化器选用不同的阈值时，算法的重构性能不同。如果能够对量化阈值进行自适应调整[14,15]，则能显著提升算法的重构性能。本文在继承 BIHT 算法优点的基础上，将基于自适应阈值的 1-bit 量化引入 BIHT 算法，提出了一种基于自适应阈值的二进制迭代硬阈值(adaptive thresholding - based binary iteration hard thresholding, AT-BIHT)算法。该算法利用已获得的重建信号信息，为当前测量值的二进制量化选择合适的量化阈值，实现了 1-bit 量化阈值的自适应调整。利用随机信号和实际心电信号(electrocardiograph, ECG)进行的仿真实验表明，本文设计的 AT-BIHT 算法的重构性能明显高于 BIHT 算法。

1　BIHT 算法

在压缩感知(CS)理论中，一般利用 $z \in R^M$ 描述稀疏信号 $\boldsymbol{x} \in R^N$ 的线性压缩测量向量，即：

$$z = \boldsymbol{\Phi x} \tag{1}$$

其中，$\boldsymbol{\Phi} \in R^{M\times N}$ 表示测量矩阵，$M < N$。在已知 $\boldsymbol{\Phi}$ 和 z 的前提下，$\hat{\boldsymbol{x}}$ 的重构模型可以表示为

$$\hat{\boldsymbol{x}} = \underset{x}{\operatorname{argmin}} \|\boldsymbol{x}\|_0, \text{ s.t. } z = \boldsymbol{\Phi x} \tag{2}$$

在 1-bit CS 中，采用比较器对各测量值进行 1-bit 极限量化，仅保留其符号信息，而丢掉其幅度信息。当为二进制量化器选取的阈值(电压比较器的比较电压)为零时，1-bit CS 的测量模型可以表示为

$$\boldsymbol{y} = \operatorname{sign}(z) = \operatorname{sign}(\boldsymbol{\Phi x}) \tag{3}$$

其中，sign(·)是符号函数：

$$\operatorname{sign}(z_i) = \begin{cases} 1 & z_i \geq 0 \\ -1 & z_i < 0 \end{cases} \tag{4}$$

$\boldsymbol{y} \in B^M, B^M := \{-1, 1\}^M$。

1-bit CS 的重构模型可以表示为

$$\hat{\boldsymbol{x}} = \underset{x}{\operatorname{argmin}} \|\boldsymbol{x}\|_1 \text{ s.t. } \boldsymbol{Y}\cdot(\boldsymbol{\Phi x}) \geq 0, \quad \|\boldsymbol{x}\|_2 = 1 \tag{5}$$

其中，$\boldsymbol{Y} = \operatorname{diag}(\boldsymbol{y})$。该重构模型利用 l_1 范数度量信号的稀疏性，以 $\boldsymbol{Y}\cdot(\boldsymbol{\Phi x}) \geq 0$ 作为一致性约束，在单位 l_2 球面 $\|\boldsymbol{x}\|_2 = 1$ 上重构信号，以克服信号幅度不确定的问题。

BIHT 算法是一种具有较高重构性能的 1-bit CS 重构算法，其实现过程如下。

输入：测量向量 $\boldsymbol{y} = \operatorname{sign}(\boldsymbol{\Phi x})$，测量矩阵 $\boldsymbol{\Phi}$，信号稀疏度 K，迭代次数 $nIter$。

初始化：$\boldsymbol{x}^0 = \boldsymbol{0}$。

迭代过程：

for　$l = 1 : nIter$

$$\boldsymbol{a}^l = \boldsymbol{x}^{l-1} + \frac{\alpha}{2}\boldsymbol{\Phi}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{y} - \operatorname{sign}(\boldsymbol{\Phi x}^{l-1}))$$

$$\boldsymbol{x}^l = \eta_K(\boldsymbol{a}^l)$$

end

输出：$\hat{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{x}^{nIter} / \|\boldsymbol{x}^{nIter}\|_2$

其中，α 为控制梯度下降步长的参数，非线性算子 $\eta_K(\boldsymbol{v})$ 保持向量 $\boldsymbol{v}$ 中幅值最大的 K 个元素的值不变，将其余元素置零。

在 BIHT 算法中，测量值的符号信息是通过符号函数 sign(·)得到，即将二进制量化的量化阈值固定为零。这在一定程度上会增加算法的重构误差[14]。针对这一问题，本文首先设计了一种基于非零固定阈值的 BIHT-τ 算法。进而，将阈值自适应的二进制量化引入 BIHT，提出了 AT-BIHT 算法。

2　BIHT-τ 算法

这里研究基于固定阈值向量 $\boldsymbol{\tau}$ 的 1-bit CS 测量与重构。在测量过程中，以 $\boldsymbol{\tau} = [\tau_1, \cdots, \tau_M]^{\mathrm{T}}$ 为阈值向量，利用二进制量化函数 $Q(\cdot;\boldsymbol{\tau})$ 对测量向量 $z = \boldsymbol{\Phi x}$ 进行 1-bit 量化，得到：

$$\boldsymbol{y} = Q(z;\boldsymbol{\tau}) \tag{6}$$

其中，对第 i 个元素的量化操作可以表示为

$$y_i = q(z_i;\tau_i) = \begin{cases} 1 & z_i \geq \tau_i \\ -1 & z_i < \tau_i \end{cases} \tag{7}$$

也可以采用符号函数 sign(·)表示为

$$y_i = \operatorname{sign}(z_i - \tau_i) \tag{8}$$

进而，可将式(6)等效表示为

$$\boldsymbol{y} = \operatorname{sign}(z - \boldsymbol{\tau}) \tag{9}$$

将在阈值向量 $\boldsymbol{\tau}$ 下的 1-bit CS 重建模型表示为

$$\hat{\boldsymbol{x}} = \underset{x}{\operatorname{argmin}} \| \boldsymbol{y} - \operatorname{sign}(\boldsymbol{\Phi x} - \boldsymbol{\tau}) \|_2^2$$
$$\text{s.t.} \quad \| \boldsymbol{x} \|_0 = K, \ \| \boldsymbol{x} \|_2 = 1 \tag{10}$$

或等效地表示:

$$\hat{\boldsymbol{x}} = \underset{x}{\operatorname{argmin}} \| [\boldsymbol{y} \cdot (\boldsymbol{\Phi x} - \boldsymbol{\tau})]_- \|_1$$
$$\text{s.t.} \quad \| \boldsymbol{x} \|_0 = K, \quad \| \boldsymbol{x} \|_2 = 1 \tag{11}$$

该模型利用 $\| [\boldsymbol{y} \cdot (\boldsymbol{\Phi x} - \boldsymbol{\tau})]_- \|_1$ 度量 $\boldsymbol{y}$ 与 $\boldsymbol{\Phi x} - \boldsymbol{\tau}$ 的符号一致性,在稀疏度的约束下,在单位 l_2 球面 $\| \boldsymbol{x} \|_2 = 1$ 上重构信号。其中,$[\boldsymbol{u}]_-$ 对向量 $\boldsymbol{u}$ 中第 i 个元素 u_i 的运算为

$$[u_i]_- = \begin{cases} u_i & u_i < 0 \\ 0 & u_i \geqslant 0 \end{cases} \tag{12}$$

引理1 $P(\boldsymbol{x}) = \| [\boldsymbol{y} \cdot (\boldsymbol{\Phi x} - \boldsymbol{\tau})]_- \|_1$ 的次梯度为 $\frac{1}{2}\boldsymbol{\Phi}^{\mathrm{T}}(\operatorname{sign}(\boldsymbol{\Phi x} - \boldsymbol{\tau}) - \boldsymbol{y})$。

证明: $P(\boldsymbol{x})$ 为凸函数,可以将其表示成:

$$P(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{M} P_i(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{M} \max\{0, -y_i \cdot (\langle \boldsymbol{\varphi}_i, \boldsymbol{x} \rangle - \tau_i)\}$$

其中,$\boldsymbol{\varphi}_i$ 表示测量矩阵 $\boldsymbol{\Phi}$ 中的第 i 行。

$$P_i(\boldsymbol{x}) = \max\{0, -y_i \cdot (\langle \boldsymbol{\varphi}_i, \boldsymbol{x} \rangle - \tau_i)\}$$
$$= \begin{cases} \langle \boldsymbol{\varphi}_i, \boldsymbol{x} \rangle - \tau_i & y_i = -1, \langle \boldsymbol{\varphi}_i, \boldsymbol{x} \rangle - \tau_i \geqslant 0 \\ \tau_i - \langle \boldsymbol{\varphi}_i, \boldsymbol{x} \rangle & y_i = 1, \langle \boldsymbol{\varphi}_i, \boldsymbol{x} \rangle - \tau_i < 0 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

若 $\langle \boldsymbol{\varphi}_i, \boldsymbol{x} \rangle - \tau_i \neq 0$,则

$$\nabla P_i(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} \boldsymbol{\varphi}_i^{\mathrm{T}} & y_i = -1, \langle \boldsymbol{\varphi}_i, \boldsymbol{x} \rangle - \tau_i \geqslant 0 \\ -\boldsymbol{\varphi}_i^{\mathrm{T}} & y_i = 1, \langle \boldsymbol{\varphi}_i, \boldsymbol{x} \rangle - \tau_i < 0 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$
$$= \frac{1}{2}[\operatorname{sign}(\langle \boldsymbol{\varphi}_i, \boldsymbol{x} \rangle - \tau_i) - y_i]\boldsymbol{\varphi}_i^{\mathrm{T}}$$

若 $\langle \boldsymbol{\varphi}_i, \boldsymbol{x} \rangle - \tau_i = 0$,则 $P_i(\boldsymbol{x})$ 的梯度由其次微分集代替,即

$$\nabla P_i(\boldsymbol{x}) = \left\{ \frac{\zeta}{2}[\operatorname{sign}(\langle \boldsymbol{\varphi}_i, \boldsymbol{x} \rangle - \tau_i) - y_i]\boldsymbol{\varphi}_i^{\mathrm{T}}; \zeta \in [0\ 1] \right\}$$
$$\in \frac{1}{2}[\operatorname{sign}(\langle \boldsymbol{\varphi}_i, \boldsymbol{x} \rangle - \tau_i) - y_i]\boldsymbol{\varphi}_i^{\mathrm{T}}$$

综合以上两种情况,有:

$$\sum_{i=1}^{M} \nabla P_i(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{M} \frac{1}{2}[\operatorname{sign}(\langle \boldsymbol{\varphi}_i, \boldsymbol{x} \rangle - \tau_i) - y_i]\boldsymbol{\varphi}_i^{\mathrm{T}}$$
$$= \frac{1}{2}\boldsymbol{\Phi}^{\mathrm{T}}[\operatorname{sign}(\boldsymbol{\Phi x} - \boldsymbol{\tau}) - \boldsymbol{y}] \in \nabla P(\boldsymbol{x})$$

证毕

为了由在阈值向量 $\boldsymbol{\tau}$ 下获得的 1-bit CS 测量向量 $\boldsymbol{y} = \operatorname{sign}(\boldsymbol{\Phi x} - \boldsymbol{\tau})$ 实现信号 $\hat{\boldsymbol{x}}$ 的重构,本文根据引理1,基于梯度下降法,设计了 BIHT-τ 算法 $\hat{\boldsymbol{x}} = \text{BIHT} - \tau(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{\Phi}, \boldsymbol{\tau}, K, nIter)$,实现过程如下。

输入: 测量向量 $\boldsymbol{y} = \operatorname{sign}(\boldsymbol{\Phi x} - \boldsymbol{\tau})$,测量矩阵 $\boldsymbol{\Phi}$,阈值向量 $\boldsymbol{\tau}$,信号稀疏度 K,迭代次数 $nIter$。

初始化: $\boldsymbol{x}^0 = \boldsymbol{0}$。

迭代过程:

for $l = 1 : nIter$

$$\boldsymbol{a}^l = \boldsymbol{x}^{l-1} + \frac{\alpha}{2}\boldsymbol{\Phi}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{y} - \operatorname{sign}(\boldsymbol{\Phi x}^{l-1} - \boldsymbol{\tau}))$$
$$\boldsymbol{x}^l = \eta_K(\boldsymbol{a}^l)$$

end

输出: $\hat{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{x}^{nIter} / \| \boldsymbol{x}^{nIter} \|_2$

3 AT-BIHT 算法

本文将阈值自适应的二进制量化引入 BIHT 算法,提出了 AT-BIHT 算法。该算法在测量端与重构端均根据已获得的重构信号信息,自适应地为当前测量值的 1-bit 量化选择合适的量化阈值,其实现框图如图1所示。

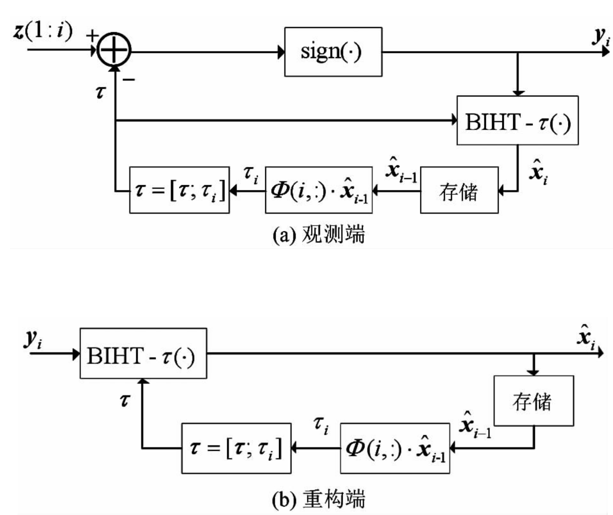

图1 AT-BIHT 算法的实现框图

AT-BIHT 算法的具体实现过程如下。

输入: 测量向量 $z = \boldsymbol{\Phi x} = [z_1, \cdots, z_M]^{\mathrm{T}}$, 测量矩阵 $\boldsymbol{\Phi}$, 信号稀疏度 K, 迭代次数 $nIter$。

初始化: $\tau_1 = 0, \boldsymbol{\tau} = [\tau_1]$

$y_1 = \mathrm{sign}(z_1 - \tau_1)$

$\boldsymbol{y} = [y_1]$

$\hat{\boldsymbol{x}}_1 = \mathrm{BIHT} - \tau(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{\Phi}(\mathbf{1}, :), \boldsymbol{\tau}, K, nIter)$

迭代过程:

for $i = 2:M$

$\tau_i = \boldsymbol{\Phi}(i, :) \cdot \hat{\boldsymbol{x}}_{i-1}$

$\boldsymbol{\tau} = [\boldsymbol{\tau}; \tau_i]$

$\boldsymbol{y}_i = \mathrm{sign}(z(\mathbf{1}:i) - \boldsymbol{\tau})$

$\hat{\boldsymbol{x}}_i = \mathrm{BIHT} - \tau(\boldsymbol{y}_i, \boldsymbol{\Phi}(\mathbf{1}:i, :), \boldsymbol{\tau}, K, nIter)$

end

输出: $\hat{\boldsymbol{x}} = \hat{\boldsymbol{x}}_M / \| \hat{\boldsymbol{x}}_M \|_2$

本算法从 1 个元素开始,逐渐增加阈值向量 $\boldsymbol{\tau}$ 中的元素个数。在第 i 次迭代中,利用第 $i-1$ 次的重建结果 $\hat{\boldsymbol{x}}_{i-1} \in R^M$ 与测量向量 $\boldsymbol{\Phi}$ 的第 i 行的乘积 $\boldsymbol{\Phi}(i, :) \cdot \hat{\boldsymbol{x}}_{i-1}$ 计算 τ_i, 并获得长度为 i 的阈值向量 $\boldsymbol{\tau} = [\boldsymbol{\tau}; \tau_i]$。利用 $\boldsymbol{\tau}$ 对测量向量的前 i 个元素 $z(1:i)$ 进行 1-bit 量化,得到向量 $\boldsymbol{y}_i = \mathrm{sign}(z(1:i) - \boldsymbol{\tau}) \in B^i$。基于 $\boldsymbol{y}_i$、测量矩阵的前 i 行 $\boldsymbol{\Phi}(1:i, :)$、阈值向量 $\boldsymbol{\tau}$, 利用 BIHT-τ 算法重建信号 $\hat{\boldsymbol{x}}_i$。最后,对 $\hat{\boldsymbol{x}}_M$ 进行归一化,将重构信号映射到单位 l_2 球面上。

4 仿真结果与分析

利用 Matlab 编写仿真程序对本文设计的 AT-BIHT 算法进行计算机实验,并将其重构性能与 BIHT 算法进行比较。计算机的硬件配置为 Intel Core i3-4160 四核 CPU、3.60 GHz 主频、4 GB 内存,软件环境为 32 位 Windows7 操作系统下的 Matlab 2014a。利用重构信噪比(signal to noise ratio, SNR)、平均角误差(average angle error, AAE)、平均汉明误差(average hamming error, AHE)、均方误差(mean squared error, MSE)作为两种算法重建性能的评价指标。SNR、AAE、AHE 和 MSE 的定义式分别为

$$\mathrm{SNR} = 20\lg(\| \boldsymbol{x} \|_2 / \| \boldsymbol{x} - \hat{\boldsymbol{x}} \|_2) \tag{13}$$

$$d_s(\boldsymbol{x}, \hat{\boldsymbol{x}}) = \frac{1}{\pi} \arccos \langle \boldsymbol{x}, \hat{\boldsymbol{x}} \rangle \tag{14}$$

$$d_H(\boldsymbol{x}, \hat{\boldsymbol{x}}) = \sum_{i=1}^{N} (x_i \oplus \hat{x}_i) \tag{15}$$

$$\mathrm{MSE} = 10\lg\left(\frac{1}{M} \| \boldsymbol{x} - \hat{\boldsymbol{x}} \|_2^2\right) \tag{16}$$

4.1 随机信号实验

采用贝努利-高斯(Bernoulli-Gaussian, BG)型随机稀疏信号进行仿真实验。取信号长度 $N = 200$, 稀疏度 $K = 40$。在采样率 1 ~ 8(bits/signal entry)的范围内进行实验,即每个信号元素采用 1bit ~ 8bit 表示。构造高斯随机测量矩阵,在每个采样率下重复进行 50 次实验,取评价指标的平均值。表 1 比较了 BIHT 算法与 AT-BIHT 算法的重建时间。图 2 ~ 图 5 分别比较了 BIHT 算法与 AT-BIHT 算法重建信号的 SNR、AAE、AHE 和 MSE。

由表 1 可见,AT-BIHT 算法的重建时间明显高于 BIHT 算法。这主要是由于 AT-BIHT 为了进行阈值自适应,逐渐增加重构信号的长度,对 BIHT-τ 算法进行了 M 次调用。

由图 2 可见,当采样率大于 2 之后,AT-BIHT 算法重建信号的信噪比至少比 BIHT 算法高 1dB。由图 3 可见,AT-BIHT 算法重建信号的平均角误差小于 BIHT 算法。由图 4 可见,AT-BIHT 算法重建信号的平均汉明误差明显低于 BIHT 算法。由图 5 可见,在采样率大于 2 之后,AT-BIHT 算法重建信号的均方误差至少比 BIHT 算法低 1dB。综合图 2 ~ 图 5 的实验结果可见,对于随机构建的 BG 稀疏信号,AT-BIHT 算法的重构性能优于 BIHT 算法。

表 1 随机信号重建时间的比较(s)

采样率	1	2	3	4	5	6	7	8
BIHT	0.0006	0.0008	0.0010	0.0013	0.0015	0.0017	0.0020	0.0022
AT-BIHT	0.0804	0.2642	0.5026	0.8601	1.3048	1.8342	2.4521	3.1671

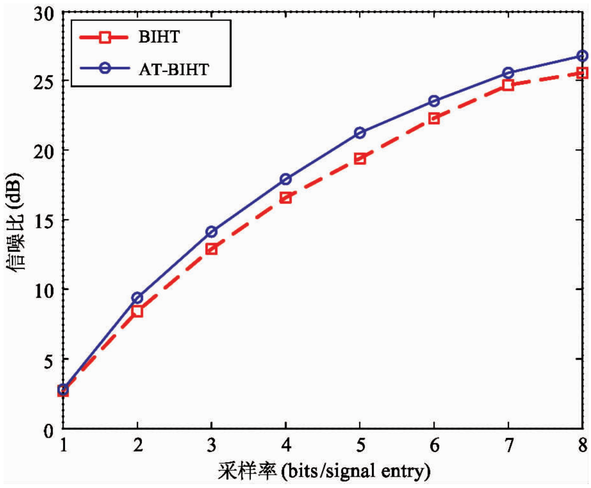

图 2　随机信号重建结果信噪比的比较

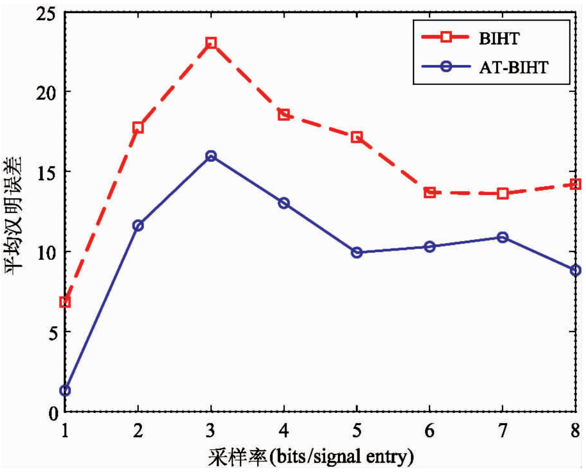

图 4　随机信号重建结果平均汉明误差的比较

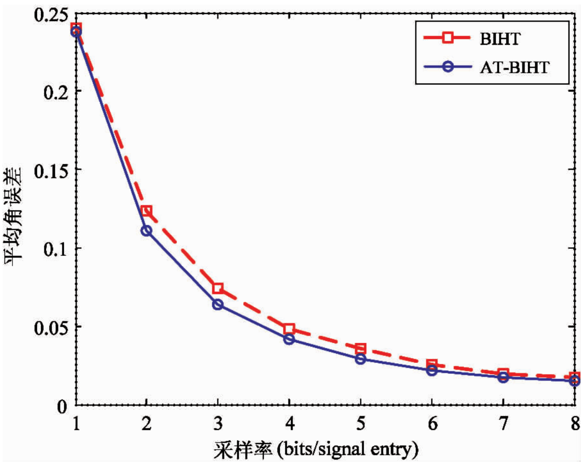

图 3　随机信号重建结果平均角误差的比较

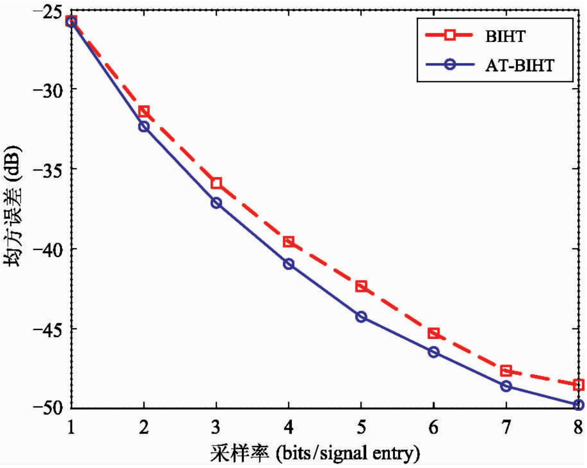

图 5　随机信号重建结果均方误差的比较

4.2　实际信号实验

采用美国麻省理工学院心电信号数据库 MIT-BIH[16] 中的一组数据 100. dat 进行实验。信号长度 $N = 1\,201$，在采样率 0.25 ~ 2 (bits/signal entry) 的范围内进行实验。对原始心电数据进行 DCT 变换，构造高斯随机测量矩阵，分别利用 BIHT 算法与 AT-BIHT 算法对心电信号的 DCT 系数进行重构。在进行逆 DCT 变换之后，比较两种算法重建信号的性能。在每个采样率下重复进行 50 次实验，取评价指标的平均值。表 2 比较了 BIHT 算法与 AT-BIHT 算法的重建时间。图 6 ~ 图 9 分别比较了 BIHT 算法与 AT-BIHT 算法重建信号的 SNR、AAE、AHE 和 MSE。

表 2　实际心电信号重建时间的比较(s)

采样率	0.25	0.50	0.75	1.00	1.25	1.50	1.75	2.00
BIHT	0.0040	0.0097	0.0142	0.0198	0.0243	0.0263	0.0314	0.0353
AT-BIHT	0.8098	3.5968	8.4322	15.0518	23.3849	33.3821	46.1209	58.5227

由表 2 可见,为了进行阈值自适应,AT-BIHT 算法的运行时间明显长于 BIHT 算法。

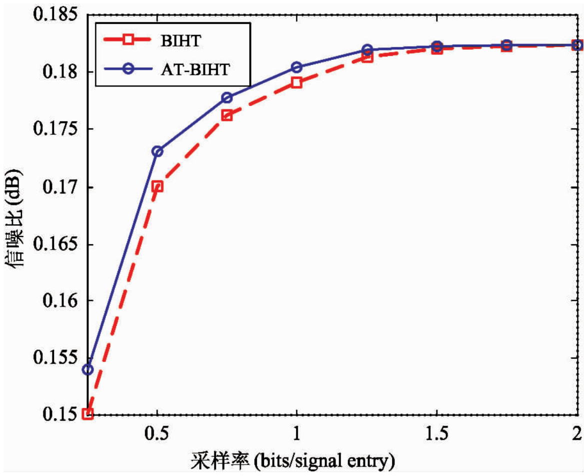

图 6　实际心电信号重建结果信噪比的比较

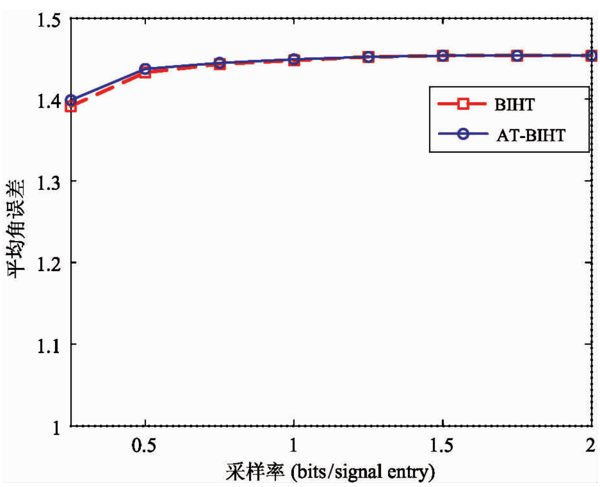

图 7　实际心电信号重建结果平均角误差的比较

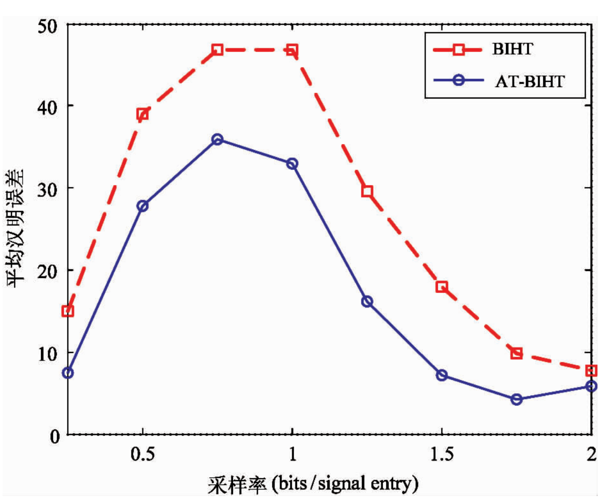

图 8　实际心电信号重建结果平均汉明误差的比较

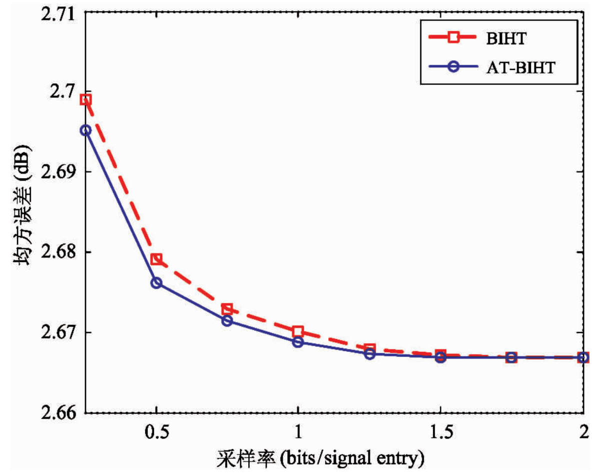

图 9　实际心电信号重建结果均方误差的比较

由图 6 可见,在各个采样率下,AT-BIHT 算法重建信号的信噪比均不低于 BIHT 算法。由图 7 可见,AT-BIHT 算法与 BIHT 算法重建信号的平均角误差基本相当。由图 8 可见,AT-BIHT 算法重建信号的平均汉明误差明显低于 BIHT 算法。由图 9 可见,在各个采样率下,AT-BIHT 算法重建信号的均方误差均不高于 BIHT 算法。

下面,比较 BIHT 算法与 AT-BIHT 算法重建信号的主观效果。原始心电信号的 DCT 系数如图 10 所示。令采样率为 1(bits/signal entry),即每个信号元素用 1bit 测量数据表示。图 11 和图 12 分别显示了利用 BIHT 算法与 AT-BIHT 算法重构的 DCT 系数。将图 11、图 12 与图 10 比较可见,AT-BIHT 算法重构的结果与原始心电信号的 DCT 系数更接近。

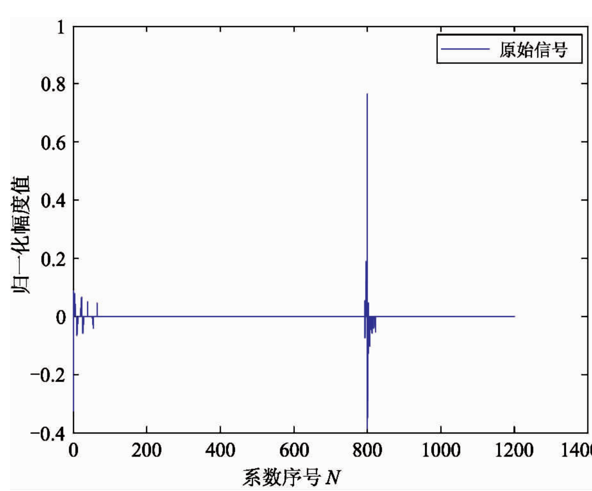

图 10　原始心电信号的 DCT 系数

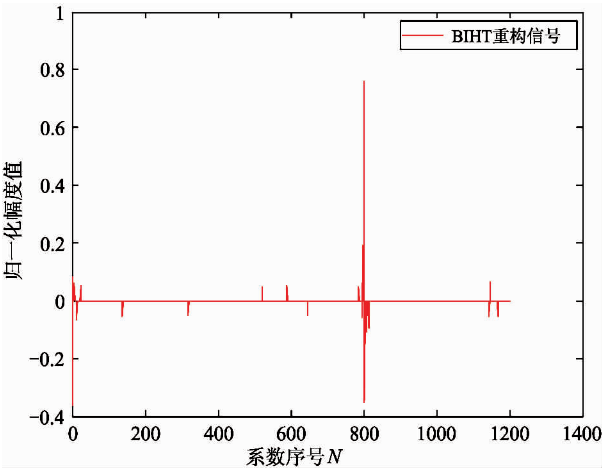

图 11　BIHT 算法重构的心电信号 DCT 系数

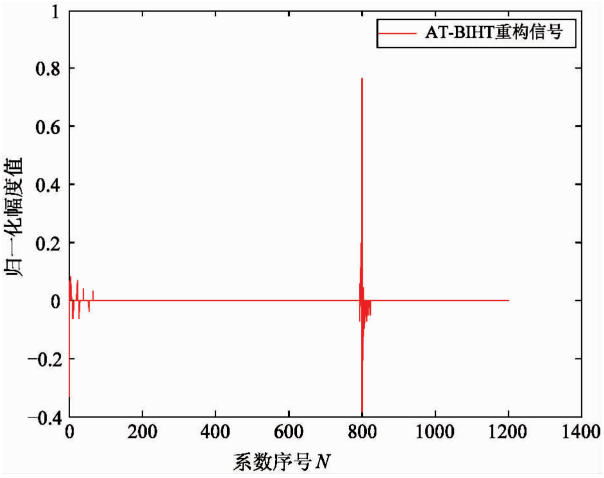

图 12　AT-BIHT 算法重构的心电信号 DCT 系数

综合上述实验结果可见,对于随机信号与实际心电信号,AT-BIHT 算法的重构时间长于 BIHT 算法,但是其重构效果优于 BIHT 算法。

5　结　论

本文将基于自适应阈值的 1-bit 量化引入 BIHT,提出了 AT-BIHT 算法。该算法能够根据已获得的重构信号信息,为当前测量值的 1-bit 量化自适应地调整量化阈值。利用随机信号和实际心电信号进行的仿真实验均表明,AT-BIHT 算法的重构性能高于 BIHT 算法。

然而,由于 AT-BIHT 算法在观测端和重构端都要进行阈值计算,所以该算法的复杂度明显高于 BIHT 算法。如何有效降低观测端的复杂度是下一步需要研究的问题。此外,BIHT 算法与 AT-BIHT 算法均需已知原始信号的稀疏度。稀疏度自适应的 AT-BIHT 算法是今后需要研究的另一项内容。

参考文献

[1] Donoho D L. Compressed sensing[J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2006, 52(4): 1289-1306

[2] Jacques L. Error decay of (almost) consistent signal estimations from quantized Gaussian random projections[J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2014, 62(8): 4696-4709

[3] Boufounos P T, Jacques L, Krahmer F, et al. Compressed Sensing and Its Applications [M]. Berlin: Springer International Publishing, 2015. 193-237

[4] Wang H T, Ghosh S, Leon-Salas W D. Compressive sensing recovery from non-ideally quantized measurements [C]. In: Proceedings of the IEEE International Symposium on Circuits and Systems, Beijing, China, 2013. 1368-1371

[5] Laska J N, Boufounos P T, Davenport M A, et al. Democracy in action: quantization, saturation, and compressive sensing[J]. *Applied and Computational Harmonic Analysis*, 2011, 31(3): 429-443

[6] Boufounos P T, Baraniuk R G. 1-bit compressive sensing [C]. In: Proceedings of the Conference on Information Sciences and Systems, Princeton, USA, 2008. 16-21

[7] Cai X, Zhang Z, Zhang H, et al. Soft consistency reconstruction: a robust 1-bit compressive sensing algorithm [C]. In: Proceedings of the IEEE International Conference on Communications, Sydney, Australia, 2014. 4530-4535

[8] Li F, Fang J, Li H, et al. Robust one-bit Bayesian compressed sensing with sign-flip errors[J]. *IEEE Signal Processing Letters*, 2014, 22(7): 857-861

[9] Laska J N, Baraniuk R G. Regime change: bit-depth versus measurement-rate in compressive sensing[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2012, 60(7): 3496-3505

[10] Huang X, Xia Y, Shi L, et al. Mixed one-bit compressive sensing with applications to overexposure correction for CT reconstruction[EB/OL]. arXiv:1701.00694v1,

2017

[11] Jacques L, Laska J N, Boufounos P T, et al. Robust 1-bit compressive sensing via binary stable embeddings of sparse vectors [J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2013, 59(4) : 2082-2102

[12] Yan M, Yang Y, Osher S. Robust 1-bit compressive sensing using adaptive outlier pursuit[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2012, 60(7): 3868-3875

[13] Huang X, Shi L, Yan M, et al. Pinball loss minimization for one-bit compressive sensing[J]. *Mathematics*, 2015, 1-11

[14] Kamilov U S, Bourquard A, Amini A, et al. One-bit measurements with adaptive thresholds[J]. *IEEE Signal Processing Letters*, 2012, 19(10): 607-610

[15] Fang J, Shen Y, Yang L, et al. Adaptive one-bit quantization for compressed sensing [J]. *Signal Processing*, 2016, 125(C): 145-155

[16] Moody B, Mark G. The impact of the MIT-BIH Arrhythmia database[J]. *IEEE Engineering in Medicine and Biology Magazine*, 2001, 20(3):45 – 50

1-bit compressed sensing algorithm with adaptive thresholding

Si Jingjing[*,***], Xu Pei[*,***], Cheng Yinbo[**]

([*] School of Information Science and Engineering, Yanshan University, Qinhuangdao 066004)

([**] Ocean College of Hebei Agricultural University, Qinhuangdao 066003)

([***] Hebei Key Laboratory of Information Transmission and Signal Processing, Qinhuangdao 066004)

Abstract

In the binary iteration hard thresholding (BIHT) algorithm, the threshold of the binary quantization is fixed as zero, which limits its reconstruction performance in some degree. Facing this problem, an adaptive thresholding-based binary iteration hard thresholding (AT-BIHT) algorithm is designed to realize sampling and reconstruction of 1-bit compressed sensing (CS) for compressible signals. This algorithm uses the adaptive thresholding-based binary quantizer instead of the symbolic function in BIHT. It selects the quantization threshold for the 1-bit quantization of the current measurement value adaptively, based on reconstructed signal already obtained. It not only inherits the advantages of BIHT, but also improves the reconstruction performance efficiently. Simulation results on both random sparse signals and real electrocardiographs show that AT-BIHT can achieve higher reconstruction performance than BIHT.

Key words: compressed sensing (CS), 1-bit compressed sensing, binary iteration hard threshold (BIHT), adaptive thresholding, adaptive thresholding-based binary iteration hard thresholding (AT-BIHT)