

基于 MMPC 的无人汽车轨迹跟踪控制^①

卢红生^{②*} 刘 斌^{③***} 蒋 峥* 胡慧中*

(* 武汉科技大学冶金自动化与检测技术教育部工程研究中心 武汉 430080)

(** 冶金工业过程系统科学湖北省重点实验室 武汉 430080)

摘 要 提出了一种用于无人汽车轨迹跟踪的控制算法。首先,将兼顾安全性、舒适性的无人汽车轨迹跟踪控制问题转换为多约束模型预测控制(MMPC)问题;然后,将目标函数和多个变量约束转化为以拉格朗日乘子为决策变量的二次规划(QP)标准形式,并提出倒序乘子求解法求取拉格朗日乘子近似解,从而得到控制序列的次优解。将本文提出的倒序乘子求解法与常规 QP 求解方法进行对比,本文提出的算法在保证求解精度的前提下,大幅提升了求解效率。在 Carsim-Matlab 仿真平台上对本文提出的无人汽车轨迹跟踪 MMPC 控制器进行了仿真验证,结果表明所提出的控制方法具有良好的跟踪性能和实时性。

关键词 多约束模型预测控制(MMPC);无人汽车轨迹跟踪;拉格朗日乘子;倒序乘子求解法

0 引 言

随着科技发展,人们对行车安全的要求越来越高,希望汽车能在无人操作的情况下完成自动行驶、自动避障等一系列自动驾驶行为。无人汽车的概念逐渐成为研究热点。

对于无人汽车,轨迹跟踪控制是必不可少的。首先无人汽车是一个典型非完整约束的系统^[1],其次车辆系统是一个高度耦合的复杂非线性系统,并且存在着相当多的不确定因素^[2],因此,无人汽车轨迹跟踪控制面临严峻挑战。国内外学者已经进行了相关研究,提出了用于无人地面车辆(unmanned ground vehicle,UGV)轨迹跟踪的多种方法,包括常规的 PID 控制,模糊控制^[3],滑模控制^[4],模型参考自适应控制^[5],神经网络控制^[6]等。需要注意的是,这些控制方法均假设计算得出的控制量不会超过方向盘转角的物理限制,也忽略了车辆与道路的相互作用导致的侧滑可能性。无人汽车轨迹跟踪控

制必须考虑车辆行驶过程的物理约束特性以及车辆与道路的相互作用。模型预测控制(model predictive control,MPC)是解决这一问题很好的方法^[7]。2007 年 Falcone 等人^[8]将模型预测控制分别应用于无人汽车的线性模型和非线性模型的轨迹跟踪控制。近年来有很多学者将非线性预测控制应用于无人汽车轨迹跟踪^[9],虽然能减少跟踪误差,但其中的非线性滚动时域优化问题导致算法的实时性较差。因此,线性预测控制方法在无人汽车控制中仍占优势。文献[10]提出一种轨迹优化算法,将参考轨迹上车辆横向制导任务描述为有约束最优控制问题,并通过线性时变模型预测控制方案实现轨迹跟踪控制。Kim 等人^[11]提出了一种基于模型预测控制的轨迹跟踪控制算法,应用二次规划优化方法来计算最优转向控制输入。Zanon 等人^[12]为了验证 MPC 控制无人汽车的安全性、平稳性,在结冰路面上进行了轨迹跟踪实验。以上的研究均强调无人汽车在行驶过程中不违反物理限制,从而保证安全性

① 国家自然科学基金(61873197)资助项目。

② 男,1993 年生,硕士生;研究方向:预测控制,无人汽车轨迹跟踪;E-mail:397261915@qq.com

③ 通信作者,E-mail: Liubin0130@163.com

(收稿日期:2019-01-19)

及平稳性,但未关注无人汽车在载人情况下的舒适性。文献[13]提及了舒适性的概念,以及舒适性的判断标准,但并未将此项纳入无人汽车的轨迹跟踪控制。

本文采用多约束模型预测控制 (multi-constraint model predictive control, MMPC) 方法实现无人汽车的轨迹跟踪控制。将无人汽车的轨迹跟踪过程中舒适性标准纳入系统模型,将安全性描述为系统约束。为提高有约束滚动时域优化问题的求解效率,提出一种倒序乘子搜索算法,并通过 CarSim-Matlab 平台模拟实车情况下的轨迹跟踪控制,验证了本文所提出的多约束模型预测控制方法的有效性。

1 车辆动力学模型

实际车辆是一个复杂的运动体,为了方便设计控制器,本文采用 2 自由度车辆模型^[14]。首先做出如下假设:

- (1) 车辆的纵向速度是恒定的;
- (2) 忽略悬架运动,只考虑 X-Y 轴的平面运动以及空气动力影响;
- (3) 把车辆的方向盘转角直接作为系统输入,并且假定左右轮转角相等。

基于以上假设,根据牛顿定律获得了如图 1 所示的车辆 2 自由度动力学模型。需要注意的是,图 1 中 $x-y$ 轴是根据 ISO8855 规定的车辆坐标系,以车辆质心 o 为原点, x 轴指向车辆前方, y 轴指向车辆左侧,与大地坐标系 $X-Y$ 不同。图 1 中各物理量的含义如表 1 所示。

对于较小的轮胎侧偏角,横向轮胎力可以近似为关于轮胎侧偏角的线性函数。前后轮轮胎侧偏角 α_f 、 α_r 和前后轮的横向轮胎力 F_{yf} 、 F_{yr} 定义为

$$\alpha_f = \delta - \beta - \frac{l_f \dot{\psi}}{V}$$
$$\alpha_r = \frac{l_r \dot{\psi}}{V} - \beta$$

(1)

$$F_{yf} = C_f \times \alpha_f = C_f \times (\delta - \beta - \frac{l_f \dot{\psi}}{V})$$
$$F_{yr} = C_r \times \alpha_r = C_r \times (\frac{l_r \dot{\psi}}{V} - \beta)$$

(2)

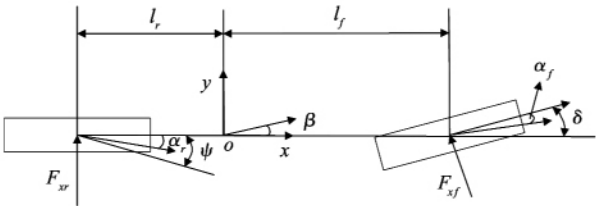


图 1 车辆 2 自由度动力学模型

表 1 车辆参数

参数	含义
o	车辆质心
F_{yf}, F_{yr}	前后轮的横向轮胎力
δ	前轮转角
l_f, l_r	质心到前后轴的距离
β	质心侧偏角 (速度方向与车身夹角)
ψ	横摆角
α_f, α_r	前后轮胎侧偏角 (车辆轮胎在横向轮胎力的作用下,使车轮的中心线与垂直于地面的车轮平面错开了一定距离而形成的倾斜角)
C_f, C_r	前后轮胎侧偏刚度
V	纵向速度
m	车的质量
I_z	车辆绕 Z 轴的转动惯量

根据图 1,可以得到汽车所受到的沿 y 轴的合外力以及绕质心的合力矩分别为

$$F_y = \cos\delta F_{yf} + F_{yr}$$

(3)

$$M_z = l_f \cos\delta F_{yf} - l_r F_{yr}$$

(4)

在短时采样周期内前轮转角 δ 非常小,所以可近似认为 $\cos\delta \approx 1$, 可得:

$$F_y = F_{yf} + F_{yr}$$

(5)

$$M_z = l_f F_{yf} - l_r F_{yr}$$

(6)

图 2 给出了车速随时间变化的微分示意图。图中 $x-y$ 坐标系是 t 时刻的车身坐标系, $x'-y'$ 坐标系是 $t + \Delta t$ 时刻的车身坐标系。不同时刻的车身坐标系是在变化的,变化角度为横摆角变化量 $\Delta\psi$, $\Delta\beta$ 为质心侧偏角变化量。需要说明的是,图中 $\Delta\psi$ 角度较大是为了方便对问题的分析,实际上它是一个很小的角度。定义时刻 t 的横向车速为 V_y , $t + \Delta t$ 时刻的横向车速在 t 时刻的 y 轴上的投影为 V'_y 。由图 2 可得:

$$V_y = V \sin \beta \quad (7)$$

$$\begin{aligned} V'_y &= V' \sin(\beta + \Delta \beta) \cos \Delta \psi \\ &\quad + V' \cos(\beta + \Delta \beta) \sin \Delta \psi \\ &= V' \sin(\beta + \Delta \beta + \Delta \psi) \end{aligned} \quad (8)$$

由于 β 在实际中较小, $\Delta \beta, \Delta \psi$ 均为微分量, 且模型假设车辆纵向速度为恒定大小, 取 ΔV_y 为两时刻的横向车速差, 则由式(7)和式(8)可得:

$$\begin{aligned} \Delta V_y &= V'_y - V_y = \beta V + \Delta \beta V + V \Delta \psi - \beta V \\ &= V(\Delta \beta + \Delta \psi) \end{aligned} \quad (9)$$

由式(9)微分可得车辆的横向位移加速度 a_y 为

$$a_y = V(\dot{\beta} + \dot{\psi}) \quad (10)$$

根据式(5)、(6)和(10)可得车辆横向动力学方程:

$$mV(\dot{\beta} + \dot{\psi}) = F_{xf} + F_{xr} \quad (11)$$

$$I_z \ddot{\psi} = l_f F_{xf} - l_r F_{xr} \quad (12)$$

联立式(2)、(11)、(12)可以得到车辆横向运动以及横摆运动的动力学方程为

$$\begin{aligned} \dot{\beta} &= \frac{-(C_r + C_f)}{mV} \beta + \left(\frac{C_r l_r - C_f l_f}{mV^2} - 1 \right) \dot{\psi} + \frac{C_f}{mV} \delta \\ \ddot{\psi} &= \frac{(C_r l_r - C_f l_f)}{I_z} \beta + \frac{-C_f l_f^2 - C_r l_r^2}{I_z V^2} \dot{\psi} + \frac{C_f l_f}{I_z} \delta \\ a_y &= \frac{-(C_r + C_f)}{m} \beta + \frac{C_r l_r - C_f l_f}{mV} \dot{\psi} + \frac{C_f}{m} \delta \end{aligned} \quad (13)$$

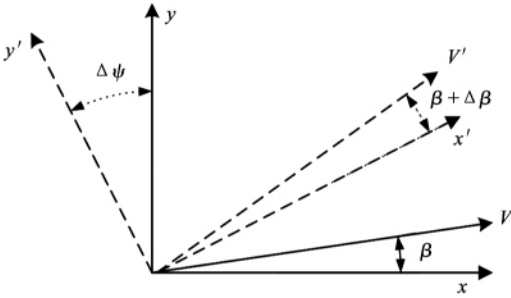


图2 车速随时间变化的微分示意图

通常的车辆轨迹跟踪控制中选取的输出量仅为横向位移 y ^[15,16]。为了改善行车时的舒适性, 本文在设计控制器时在输出向量中增加了横向位移加速度 a_y ; 为了改善行车时的安全性, 在输出向量中增加车辆质心侧偏角 β 以及车辆横摆角速度 $\dot{\psi}$ 。因此, 取状态向量和输出向量分别为

$$X_c = [y \quad \beta \quad \psi \quad \dot{\psi}]^T$$

$$Y_c = [a_y \quad y \quad \beta \quad \dot{\psi}]^T$$

根据上述车辆动力学模型, 并取系统控制输入量 $u_c = \delta$ 得到连续的系统状态方程为

$$\begin{aligned} \dot{X}_c(t) &= A_c X_c(t) + B_c u_c(t) \\ Y_c(t) &= C_c X_c(t) + D_c u_c(t) \end{aligned} \quad (14)$$

其中,

$$A_c = \begin{bmatrix} 0 & V & V & 0 \\ 0 & \frac{-(C_r + C_f)}{mV} & 0 & \frac{-C_f l_f + C_r l_r}{mV^2} - 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{(-C_f l_f + C_r l_r)}{I_z} & 0 & \frac{-C_f l_f^2 - C_r l_r^2}{I_z V^2} \end{bmatrix}$$

$$B_c = \begin{bmatrix} 0 & \frac{C_f}{mV} & 0 & \frac{C_f l_f}{I_z} \end{bmatrix}^T$$

$$C_c = \begin{bmatrix} 0 & \frac{-(C_r + C_f)}{m} & 0 & \frac{-C_f l_f + C_r l_r}{mV} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$D_c = \begin{bmatrix} \frac{C_f}{m} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$$

为了方便设计多约束模型预测控制器, 首先将上述连续模型进行离散化得到如下离散状态方程:

$$X(k+1) = AX(k) + Bu(k) \quad (15)$$

$$Y(k) = CX(k) + Du(k)$$

其中 A, B 分别为矩阵 A_c, B_c 离散后得到的矩阵, $C = C_c, D = D_c$ 。

在轨迹跟踪的 MMPC 控制中, 为保证各个输出变量的硬约束和软约束, 以及控制量和控制量增量的硬约束均得到满足, 需要对状态方程式(15)进行增广变换。

首先定义状态向量、输入量的增量形式:

$$\Delta X(k) = X(k) - X(k-1)$$

$$\Delta u(k) = u(k) - u(k-1)$$

可得:

$$Y(k) - Y(k-1) = C \Delta X(k) + D \Delta u(k)$$

取增广向量 $Z_a(k) = \begin{bmatrix} \Delta X(k) \\ Y(k-1) \end{bmatrix}$, 将式(15)

转化为

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}_a(k+1) &= \mathbf{A}_a \mathbf{Z}_a(k) + \mathbf{B}_a \Delta u(k) \\ \mathbf{Y}_a(k) &= \mathbf{C}_a \mathbf{Z}_a(k) + \mathbf{D} \Delta u(k) \end{aligned} \tag{16}$$

其中,

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_a &= \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{O} \\ \mathbf{C} & \mathbf{I}_a \end{bmatrix}, \mathbf{B}_a = \begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ \mathbf{D} \end{bmatrix}, \\ \mathbf{C}_a &= [\mathbf{C} \quad \mathbf{I}_a], \mathbf{O} = [\mathbf{0}]_{4 \times 4}, \mathbf{I}_a = [\mathbf{I}]_{4 \times 4} \end{aligned}$$

2 多约束模型预测控制器设计

2.1 预测方程

MMPC 控制器设计的一个重要环节是基于预测模型对车辆在未来若干时刻的行为进行预测。

设当前时刻为 $k(k \geq 0)$, 预测时域为 N_p , 控制时域为 $N_c(N_c \leq N_p)$ 。用 $\Delta \mathbf{U}_m(k)$ 表示在 k 时刻计算所得未来输入增量序列; 用 $\mathbf{Y}_m(k)$ 表示在 k 时刻计算所得预测输出序列。

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{U}_m(k) &= [\Delta u(k), \dots, \Delta u(k+N_c-1)]^T \\ \mathbf{Y}_m(k) &= [\mathbf{Y}_a(k+1), \dots, \mathbf{Y}_a(k+N_p)]^T \end{aligned}$$

基于模型预测控制原理^[17], 可以推导出预测方程的表达式如下:

$$\mathbf{Y}_m(k) = \mathbf{F} \mathbf{Z}_a(k) + \mathbf{G} \Delta \mathbf{U}_m(k) \tag{17}$$

其中,

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= [\mathbf{C}_a \mathbf{A}_a \quad \mathbf{C}_a \mathbf{A}_a^2 \quad \dots \quad \mathbf{C}_a \mathbf{A}_a^{N_p}]_{4N_p \times 8}^T \\ \mathbf{G} &= \begin{bmatrix} \mathbf{C}_a \mathbf{B}_a & \mathbf{D} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{C}_a \mathbf{A}_a \mathbf{B}_a & \mathbf{C}_a \mathbf{B}_a & \mathbf{D} & \mathbf{0} \\ \dots & \dots & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{C}_a \mathbf{A}_a^{N_c-1} \mathbf{B}_a & \mathbf{C}_a \mathbf{A}_a^{N_c-2} \mathbf{B}_a & \dots & \mathbf{D} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{C}_a \mathbf{A}_a^{N_p-1} \mathbf{B}_a & \mathbf{C}_a \mathbf{A}_a^{N_p-2} \mathbf{B}_a & \dots & \mathbf{C}_a \mathbf{A}_a^{N_p-N_c+1} \mathbf{B}_a \end{bmatrix}_{4N_p \times N_c} \end{aligned}$$

2.2 输出变量的参考目标值

本文所设计 MMPC 控制器的被控输出量包括车辆横向加速度 a_y 、车辆横向位移 y 、车辆质心侧偏角 β 及车辆横摆角角速度 $\dot{\psi}$ 。取参考目标向量为如下形式:

$$\mathbf{R}_r(k) = \begin{bmatrix} a_{yr}(k+1) \\ y_r(k+1) \\ \psi_r(k+1) \\ \dot{\psi}_r(k+1) \\ \vdots \\ a_{yr}(k+N_p) \\ y_r(k+N_p) \\ \beta_r(k+N_p) \\ \dot{\psi}_r(k+N_p) \end{bmatrix}_{4N_p \times 1}$$

根据文献[18]提供的车辆动力学知识可知, 各输出变量 a_y 、 y 、 β 与 $\dot{\psi}$ 的参考目标值可以根据行车参考轨迹的当前时刻曲率 C_r 求得。

(1) 车辆质心侧偏角

$$\beta_{curv} = C_r(l_r - \frac{l_f m V^2}{2C_r(l_r + l_f)})$$

(2) 车辆横摆角角速度

$$\dot{\psi}_{curv} \approx V \cdot C_r / \cos \beta_{curv}$$

(3) 车辆横向位移加速度

$$a_{ycurv} = \frac{V^2}{l_r} \cdot \sin \beta_{curv}$$

按照以上计算方法得到的参考目标值也不能直接应用到参考目标向量中, 因为这些参考目标值可能超出了车辆行驶的物理约束, 或安全性和舒适性要求引起的约束。因此在参考给定向量化的过程中需要对每个时刻的每个参考目标值都进行约束校验, 最终得到预测控制目标函数中的参考目标向量。以下是以车辆质心侧偏角为例的校验方法。

$$\beta_r(k) = \begin{cases} \beta_{\max} & \beta_{curv} > \beta_{\max} \\ \beta_{curv} & -\beta_{\max} < \beta_{curv} < \beta_{\max} \\ -\beta_{\max} & \beta_{curv} < -\beta_{\max} \end{cases}$$

其中 $\beta_{\max}$ 为车辆质心侧偏角的最大限制。

2.3 目标函数及约束

取 k 时刻的目标函数为以下形式:

$$\begin{aligned} J(k) &= [\mathbf{R}_r(k) - \mathbf{Y}_m(k)]^T \mathbf{Q} [\mathbf{R}_r(k) - \mathbf{Y}_m(k)] \\ &\quad + \Delta \mathbf{U}_m(k)^T \mathbf{R} \Delta \mathbf{U}_m(k) \end{aligned} \tag{18}$$

其中 $\mathbf{Q}$ 、 $\mathbf{R}$ 矩阵为适维加权矩阵。

在无人汽车轨迹跟踪控制过程中系统主要服从 3 类约束, 即控制量、控制增量和输出量的约束。将

控制量及其增量约束描述为

$$-C_1\Delta\delta^{\max} \leq \Delta U_m(k) \leq C_1\Delta\delta^{\max} \quad (19)$$

$$-C_1\delta^{\max} \leq C_1u(k-1) + C_2\Delta U_m(k) \leq C_1\delta^{\max} \quad (20)$$

将输出量约束描述为

$$C_3 \begin{bmatrix} -a_{y\max} \\ y_{\max} \\ -\beta_{\max} \\ -\dot{\psi}_{\max} \end{bmatrix} \leq FZ_a(k) + G\Delta U_m(k) \leq C_3 \begin{bmatrix} a_{y\max} \\ y_{\max} \\ \beta_{\max} \\ \dot{\psi}_{\max} \end{bmatrix} \quad (21)$$

其中 $\delta^{\max}$ 和 $\Delta\delta^{\max}$ 分别为车辆转向角的最大值和单个采样周期内的最大变化值。

$$C_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}_{N_c \times 1}, \quad C_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{bmatrix}_{N_c \times N_c},$$

$$C_3 = \begin{bmatrix} I_{4 \times 4} \\ \vdots \\ I_{4 \times 4} \end{bmatrix}_{4N_p \times 4} \quad \text{将式(19)、(20)、(21)整合得到}$$

$$M\Delta U_m(k) \leq N \quad (22)$$

其中,

$$M = \begin{bmatrix} -C_2 \\ C_2 \\ -I \\ I \\ -G \\ G \end{bmatrix}, \quad N = \begin{bmatrix} C_1\delta^{\max} + C_1u(k-1) \\ C_1\delta^{\max} - C_1u(k-1) \\ C_1\Delta\delta^{\max} \\ C_1\Delta\delta^{\max} \\ -C_3 \begin{bmatrix} -a_{y\max} \\ y_{\max} \\ -\beta_{\max} \\ -\dot{\psi}_{\max} \end{bmatrix} + FZ_a(k) \\ C_3 \begin{bmatrix} -a_{y\max} \\ y_{\max} \\ -\beta_{\max} \\ -\dot{\psi}_{\max} \end{bmatrix} - FZ_a(k) \end{bmatrix}$$

2.4 二次规划求解问题

基于以上预测方程、目标函数及约束对未来控

制量(前轮转角)增量序列求解。将式(18)形式的目标函数改写为二次规划标准形式,由式(17)、(18)、(22)得:

$$J_E(k) = \frac{1}{2}\Delta U_m(k)^T E_m \Delta U_m(k) + \Delta U_m(k)^T F_m$$

$$M\Delta U_m(k) \leq N \quad (23)$$

其中,

$$E_m = 2(G^T Q G + R)$$

$$F_m = -2G^T Q [R_r(k) - FZ_a(k)]$$

显然, E_m 为正定对称的矩阵。为了最小化不等式约束下的目标函数值,本文考虑下面的拉格朗日表达式:

$$J_L(k) = \frac{1}{2}\Delta U_m(k)^T E_m \Delta U_m(k) + \Delta U_m(k)^T F_m$$

$$+ \lambda^T (M\Delta U_m(k) - N) \quad (24)$$

其中, λ 为拉格朗日乘子向量,其维数为 $4N_c + 8N_p$ 。

因此,原问题被转化为如下对偶问题:

$$\max_{\lambda \geq 0} \min_{\Delta U_m} (J_L) \quad (25)$$

对式(24)求 ΔU_m 的偏导得:

$$\Delta U_m(k) = -E_m^{-1} (F_m + M^T \lambda) \quad (26)$$

将式(26)代入式(25)可将式(25)指出的对偶问题转换为以 λ 为决策变量的二次规划问题:

$$\min_{\lambda \geq 0} \left(\frac{1}{2} \lambda^T H_m \lambda + \lambda^T K_m \right) \quad (27)$$

其中,

$$H_m = M E_m^{-1} M^T$$

$$K_m = N + M E_m^{-1} F_m$$

本文提出一种倒序乘子求解法求取次优解,减少算法的计算时间,增强控制系统实时性。将式(27)展开为

$$J_L(k) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} h_{11} & \cdots & h_{n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{1n} & \cdots & h_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_n \end{bmatrix} \quad (28)$$

其中 $n = 4N_c + 8N_p$ 为 λ 的维数, h_{ij} , k_i 分别为矩阵 H_m , K_m 中的元素,且由式(27)可得 H_m 为正定对称

矩阵。

将(28)进一步展开为

$$\begin{aligned} J_L(k) = & \frac{1}{2}h_{11}\lambda_1^2 + (h_{12}\lambda_2 + h_{13}\lambda_3 + \cdots + h_{1n}\lambda_n)\lambda_1 \\ & + k_1\lambda_1 + \frac{1}{2}h_{22}\lambda_2^2 \\ & + (h_{23}\lambda_3 + h_{24}\lambda_4 + \cdots + h_{2n}\lambda_n)\lambda_2 + k_2\lambda_2 \\ & \dots \\ & + \frac{1}{2}h_{n-1n-1}\lambda_{n-1}^2 + (h_{n-1n}\lambda_n)\lambda_{n-1} + k_{n-1}\lambda_{n-1} \\ & + \frac{1}{2}h_{nn}\lambda_n^2 + k_n\lambda_n \end{aligned} \tag{29}$$

由式(29)看出, $J_L(k)$ 可分解为 n 个开口向上的二次函数,各二次函数的对称轴 $\lambda^i(i \in (1,n))$ 对应该函数的最小值。式(29)中前 $n-1$ 个二次函数的对称轴计算如下:

$$\begin{aligned} \lambda^1 &= \frac{-(h_{12}\lambda_2 + h_{13}\lambda_3 + \cdots + h_{1n}\lambda_n) - k_1}{h_{11}} \\ \lambda^2 &= \frac{-(h_{23}\lambda_3 + h_{24}\lambda_4 + \cdots + h_{2n}\lambda_n) - k_2}{h_{22}} \\ &\vdots \\ \lambda^{n-1} &= \frac{-(h_{n-1n}\lambda_n) - k_{n-1}}{h_{n-1n-1}} \end{aligned} \tag{30}$$

如果 λ_n 为一确定值,式(30)从下往上逆序求解可得由对称轴组成的 λ 向量。因为 λ_n 可唯一确定 $\lambda^i(i \in (1,n-1))$,从而将求解多维向量 λ 的问

题降维为搜索单变量 λ_n 的一维优化问题。现在假设 $\lambda^* = [\lambda_1^* \cdots \lambda_n^*]^T$ 为式(27)二次规划问题最优解对应的拉格朗日乘子向量。如果找到一个 λ_n 且 $\lambda_n = \lambda_n^*$,则可以求得一个由对称轴组成的 λ 向量使 $J_L(k)$ 取最小值。

本文采取逐层搜索法对 λ_n^* 进行搜索。具体搜索流程见图 3,图中 d_1 为一次搜索的步长, d_2 为二次搜索的步长,这 2 个参数决定 λ_n^* 的精度。在一次搜索中, λ_n^* 的上下界分别为 $\lambda_{\max}$ 和 $\lambda_{\min}$ 。取 $\lambda_{\min}$ 为 0,而 $\lambda_{\max}$ 的设定要求在得到最优解的同时保证计算效率。经实验验证, $\lambda_{\max}$ 的选取可以以对称轴 $\lambda^n = -k_n \setminus h_{nn}$ 为依据,取 $\lambda_{\max} = 2 \mid \lambda^n \mid$ 。

3 数值仿真

3.1 倒序乘子求解法求解二次规划问题

在进行无人汽车轨迹跟踪控制仿真前,首先分别用本文提出的倒序乘子求解法与有效集法对二次规划问题求解,从而对两者的求解精度以及求解速度进行对比。实验采用 Matlab 仿真平台,计算机 CPU 频率为 2.3 GHz。求解的二次规划问题形式为

$$J_T = \frac{1}{2}X^T E_T X + X^T F_T \tag{31}$$

$$M_T X < N_T$$

其中, J_T 为目标函数值, X 为二次规划问题的解序列, E_T 、 F_T 、 M_T 及 N_T 为系数矩阵。

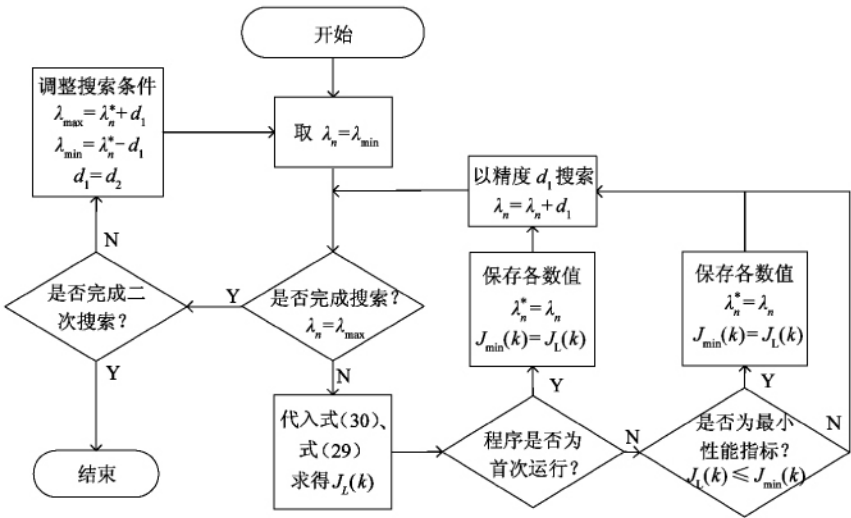


图 3 倒序乘子求解法流程图

表 2 所示为本文倒序乘子求解法与有效集法的求解结果对比。与有效集法相比,本文倒序乘子求解法是将二次规划问题转化为以一个拉格朗日乘子为决策变量的单变量寻优问题。而有效集法则是从初始解出发不断调整有效集,每次有效集的调整都需要按照多项规则判断,最终求得最优解。因此本

文算法可大幅提高求解效率,由表 2 看出本文倒序乘子求解法的计算速度是有效集法的 4 倍左右。另外,本文求取最优解与有效集法求解精度接近。上表中目标函数值 J_T 存在负数的原因是,在性能指标函数转化为式(31)的二次规划标准形式的过程中去掉了不影响解序列的无关正项。

表 2 二次规划求解结果对比

系数矩阵	求解方法	拉格朗日乘子序列	解序列	目标函数值	计算时长(s)
$E_T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0.5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0.5 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $F_T = [-2 \quad -3 \quad -1]^T$ $M_T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ $N_T = [3 \quad 4]^T$	有效集法	$\lambda = \begin{bmatrix} 2.7158e-14 \\ 0.42857142 \end{bmatrix}$	$X = \begin{bmatrix} 1.4286 \\ 2.5714 \\ 0.2857 \end{bmatrix}$	$J_T = -6.2857$	0.039
$E_T = \begin{bmatrix} 1 & 0.5 & 2 \\ 0.5 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 6 \end{bmatrix}$ $F_T = [1 \quad 5 \quad 3 \quad 1]^T$ $M_T = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 5 & 0 & 4 \\ 8 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ $N_T = [0 \quad 3 \quad 2]^T$	倒序乘子求解法	$\lambda = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.4300 \end{bmatrix}$	$X = \begin{bmatrix} 1.4267 \\ 2.5700 \\ 0.2867 \end{bmatrix}$	$J_T = -6.2843$	0.011
$E_T = \begin{bmatrix} 1 & 0.5 & 2 \\ 0.5 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 6 \end{bmatrix}$ $F_T = [1 \quad 5 \quad 3 \quad 1]^T$	有效集法	$\lambda = \begin{bmatrix} 5.1215e-16 \\ 0.25297619 \\ 7.7235e-14 \end{bmatrix}$	$X = \begin{bmatrix} 1.5476 \\ -2.8869 \\ -1.1845 \end{bmatrix}$	$J_T = -8.5997$	0.040
$E_T = \begin{bmatrix} 1 & 0.5 & 2 \\ 0.5 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 6 \end{bmatrix}$ $F_T = [1 \quad 5 \quad 3 \quad 1]^T$	倒序乘子求解法	$\lambda = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.2530 \\ 0 \end{bmatrix}$	$X = \begin{bmatrix} 1.5476 \\ -2.8869 \\ -1.1845 \end{bmatrix}$	$J_T = -8.5997$	0.013
$E_T = \begin{bmatrix} 3 & 0.5 & 1 \\ 0.5 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $F_T = [-1 \quad 3 \quad 2]^T$	有效集法	$\lambda = \begin{bmatrix} 1.27843526 \\ 24.22912617 \\ 2.6279e-10 \\ 0.37623274 \end{bmatrix}$	$X = \begin{bmatrix} -2.2436 \\ -6.0897 \\ 1.2179 \end{bmatrix}$	$J_T = 12.4721$	0.041
$E_T = \begin{bmatrix} -2 & 3 & -1 \\ 0.5 & 0 & 0.1 \\ 3 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}$ $F_T = [-15 \quad -1 \quad -2 \quad 0]^T$	倒序乘子求解法	$\lambda = \begin{bmatrix} 1.2699 \\ 24.3685 \\ 0 \\ 0.3800 \end{bmatrix}$	$X = \begin{bmatrix} -2.2558 \\ -6.0518 \\ 1.2088 \end{bmatrix}$	$J_T = 12.4796$	0.013

然后,用这 2 种方法求解的 MMPC 控制器分别进行无人汽车轨迹跟踪控制实验。国内外也有较多学者以双移线轨迹进行无人汽车的轨迹跟踪能力测试。因此本次实验也采用双移线作为参考轨迹。它的表达形式如下:

$$-d_{y2}(\frac{1}{\cosh(z_2)})^2(\frac{1.2}{d_{x2}}) \quad (32)$$

式中, $z_1 = (2.4/25) \times (X - 27.19) - 1.2$, $z_2 = (2.4/21.95) \times (X - 56.46) - 1.2$, $d_{y1} = 4.05$, $d_{y2} = 5.7$, $d_{x1} = 25$, $d_{x2} = 21.95$, X 为车的纵向位移。

取预测时域 $N_p = 20$, 控制时域 $N_c = 5$, 权重矩阵 $Q = I_{N_p \times N_p}$, $R = 50 \times I_{N_c \times N_c}$, 控制器采样周期 $T = 0.05$ s, 车速为 36 km/h, 用本文提出的 MMPC 轨迹跟踪控制对式(14)的 2 自由度线性汽车动力学模

$$Y_{ref}(X) = \frac{d_{y1}}{2}(1 + \tanh(z_1)) - \frac{d_{y2}}{2}(1 + \tanh(z_2))$$

$$\psi_{ref}(X) = \arctan(d_{y1}(\frac{1}{\cosh(z_1)})^2(\frac{1.2}{d_{x1}}))$$

型进行控制,模型具体参数见表 3。令基于倒序乘子求解法的 MMPC 控制器为控制器 A,有效集法求解的为控制器 B。

表 3 无人汽车仿真实验参数表

参数	数值	名称
m	1723 kg	无人汽车的质量
Cr	$62\,700\text{ N}\cdot\text{rad}^{-1}$	后轮侧偏刚度
Cf	$66\,900\text{ N}\cdot\text{rad}^{-1}$	前轮侧偏刚度
Lr	1.468 m	后轮到质心的距离
Lf	1.232 m	前轮到质心的距离
I	$4\,175\text{ kg}\cdot\text{m}^2$	车绕 Z 轴的转动惯量
g	9.8 m/s^2	重力加速度
μ	0.8	路面附着系数

图 4、图 5 分别为用本文倒序乘子求解法和有效集法求解的 MMPC 控制器对无人汽车轨迹跟踪系统的仿真结果。图 6 为 2 种求解方法的计算时长。图 7 为约束条件下基于 MMPC(倒序乘子求解法)的无人汽车轨迹跟踪系统仿真图。

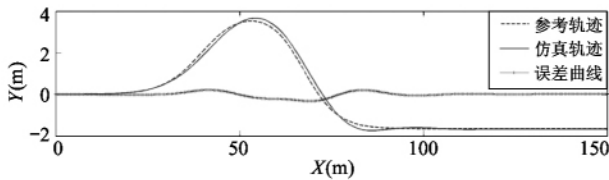


图 4 基于控制器 A 的无人汽车轨迹跟踪系统仿真图

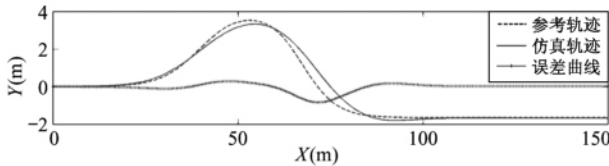


图 5 基于控制器 B 的无人汽车轨迹跟踪系统仿真图

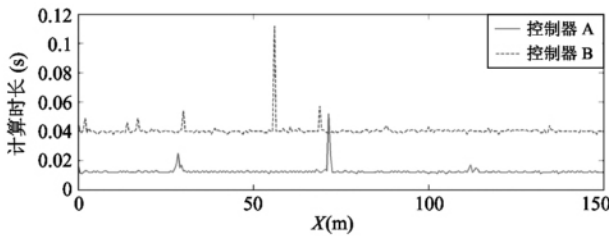


图 6 控制器 A、B 的求解时长

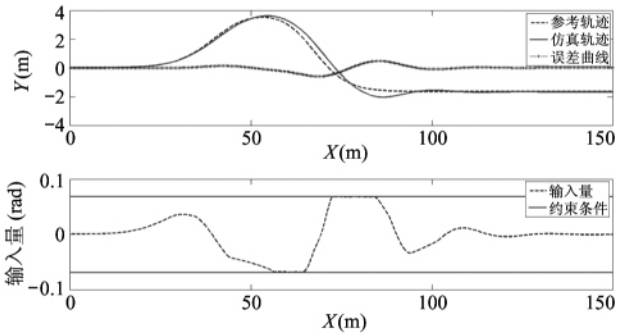


图 7 约束条件下控制器 A 的无人汽车轨迹跟踪系统仿真图

图中 X 、 Y 轴分别为大地坐标系下的横、纵坐标。由图 4、图 5 的控制效果可看出本文提出的控制器的跟踪性能较好。由图 6 的计算时长对比结果可看出,在实时性方面本文提出的倒序乘子求解法更好一些。需要说明的是,图 7 中设计的约束条件 ($\delta_{\max}=0.0684\text{ rad}$) 不是实际无人汽车转向输入量的物理限制,是为了测试本文设计的倒序乘子求解法在约束条件下的控制效果。可看出本文提出的方法在满足约束条件情况下也能达到较好的控制效果。

3.2 CarSim-Matlab 环境下的无人汽车轨迹跟踪控制系统仿真

为了验证本文提出的控制器的有效性,必须进行实车实验,但考虑到安全性和经济性等问题,本文采用 CarSim-Matlab 仿真来模拟实车的轨迹跟踪。CarSim 是专门针对车辆动力学的仿真软件,可以详细定义整车各系统的特性参数。

将表 3 中汽车参数以及控制器所需的状态量设置到 CarSim 中,并在 CarSim-Matlab 平台上按图 8 所示的系统框图搭建基于 MMPC 控制器的无人汽车轨迹跟踪控制系统。参考轨迹仍为双移线轨迹,设定预测时域 $N_p=25$,控制时域 $N_c=7$,权重矩阵

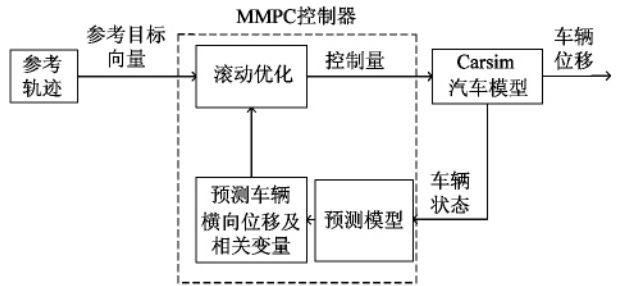


图 8 基于 MMPC 控制器的无人汽车轨迹跟踪控制系统框图

$Q = I_{N_p \times N_p}$, $R = 50 \times I_{N_c \times N_c}$, 控制器周期 $T = 0.05$ s, 车速为 72 km/h, 得到相应的控制状态和跟踪曲线见图 9 和图 10。

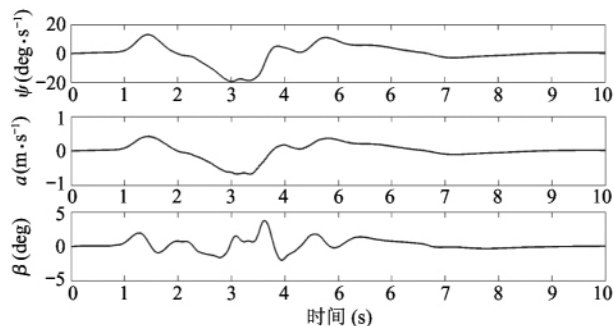


图 9 无人汽车行驶过程各状态图

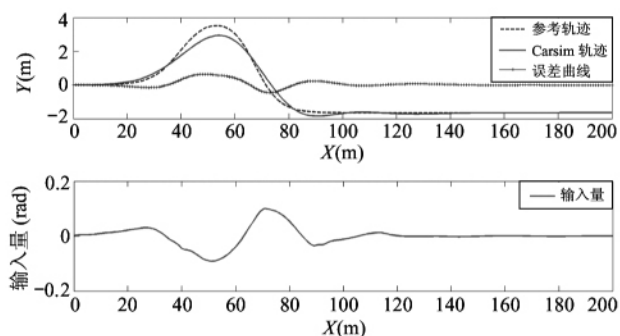


图 10 基于 MMPC 控制器的无人汽车轨迹跟踪控制系统仿真图

需指出的是,3.1 节的仿真实验是以汽车 2 自由度线性模型为被控对象进行的验证实验,而本小节被控对象则是采用 Carsim 软件模拟的实车模型。图中 X 、 Y 轴分别为大地坐标系下的横、纵坐标。图 9 所示为车辆行驶过程的各个状态量,决定着行车过程中的安全性和舒适性。从上到下的顺序分别为车辆横摆角速度、横向位移加速度以及质心侧偏角。据文献[18]提出的车辆行驶的安全性标准可知,最大车辆横摆角速度 $\dot{\psi}_{\max} \approx 180 \mu\text{g}/\pi V \approx 22.5$ (deg/s)、最大车辆质心侧偏角 $\beta_{\max} = \pi/18 \approx 10$ deg; 车辆行驶过程中乘客的舒适性由最大横向位移加速度 ($|a_{y\max}| \leq \mu\text{g} = 0.8 \text{ g}$) 决定。图 9 中各状态量均能满足安全性以及舒适性的判断条件。图 10 为基于 MMPC 控制器的无人汽车轨迹跟踪系统仿真图。由图 10 可看出本文设计的控制器在较高车速下的跟踪效果较好,实时性较强。车辆前轮转向

角输入也较平稳且满足约束条件 $\delta \in [-0.1744, 0.1744]$ 。

综上,本文设计的 MMPC 控制器能使用于无人汽车轨迹跟踪控制,具有良好的实时性,且无人汽车行驶过程中的安全性、舒适性均可以保障。

4 结 论

本文着重研究了基于 MMPC 方法的无人汽车轨迹跟踪控制,及车辆行驶过程中的安全性、舒适性问题。为解决行车舒适性问题,本文将横向位移加速度纳入系统模型,并加以约束;为改善算法实时性,提出了倒序乘子求解法对二次规划问题求解。通过与有效集法的对比实验,验证了本文倒序乘子求解法的有效性。最终,在 CarSim-Matlab 平台实现了无人汽车轨迹跟踪控制,检验了本文提出的 MMPC 控制器的实用性。

参考文献

- [1] 唐飞云. 自主导航车轨迹跟踪控制方法研究[D]. 大连理工大学车辆工程学院, 2012
- [2] 曹凯, 于善义, 于少伟. 基于多隐马尔可夫模型的车辆机动行为识别与预测[J]. 信息与控制, 2014, 43(4): 506-512
- [3] Wang X, Fu M, Ma H, et al. Lateral control of autonomous vehicles based on fuzzy logic[J]. *Control Engineering Practice*, 2015, 34:1-17
- [4] Cao Z C, Zhao Y T, Yi-Li F U. Trajectory tracking control approach of a car-like mobile robot[J]. *Acta Electronica Sinica*, 2012, 40(4): 632-635
- [5] Fukao T, Miyasaka S, Mori K. Active steering systems based on model reference adaptive nonlinear control[J]. *Vehicle System Dynamics*, 2014, 45(2): 301-318
- [6] Wang Z M, Liu K X. Path tracking and avoiding obstacles of mobile robot in dynamic environment[J]. *Control Engineering of China*, 2010, 8(2): 5-16
- [7] Raffo G V, Gomes G K, Normey-Rico J E, et al. A predictive controller for autonomous vehicle path tracking[J]. *IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems*, 2009, 10(1): 92-102
- [8] Falcone P, Borrelli F, Asgari J, et al. Predictive active

- steering control for autonomous vehicle systems[J]. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 2007, 15(3): 566-580
- [9] Zanon M, Frasch J V, Vukov M, et al. Model Predictive Control of Autonomous Vehicles[M]. Optimization and Optimal Control in Automotive Systems. West Berlin: Springer International Publishing, 2014: 80-85
- [10] Gutjahr B, Lutz Gröll, Werling M. Lateral vehicle trajectory optimization using constrained linear time-varying MPC[J]. *IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems*, 2017, 18(6):1586-1595
- [11] Kim E, Kim J, Sunwoo M. Model predictive control strategy for smooth path tracking of autonomous vehicles with steering actuator dynamics[J]. *International Journal of Automotive Technology*, 2014, 15(7):1155-1164
- [12] Zanon M, Frasch J V, Vukov M, et al. Model Predictive Control of Autonomous Vehicles[M]. Optimization and Optimal Control in Automotive Systems. West Berlin: Springer International Publishing, 2014: 28-32
- [13] Carvalho A, Stéphanie L, Schildbach G, et al. Automated driving: the role of forecasts and uncertainty —a control perspective[J]. *European Journal of Control*, 2015, 24:14-32
- [14] Rajamani R. Vehicle dynamics and control[J]. *Journal of the Japan Fluid Power System Society*, 2012, 39(8): 111
- [15] Gong J, Xu W, Jiang Y, et al. Multi-constrained model predictive control for autonomous ground vehicle trajectory tracking[J]. *Journal of Beijing Institute of Technology*, 2015, 24(4):441-448
- [16] 王秋, 曲婷, 陈虹. 基于随机模型预测控制的自主车辆转向控制[J]. 信息与控制, 2015, 44(4):499-506
- [17] 席裕庚. 预测控制[M]. 北京:国防工业出版社, 1993: 24-25
- [18] Ji J, Khajepour A, Melek W W, et al. Path planning and tracking for vehicle collision avoidance based on model predictive control with multiconstraints[J]. *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, 2017, 66(2): 952-964

Trajectory tracking control of unmanned vehicle based on MMPC

Lu Hongsheng*, Liu Bin***, Jiang Zheng*, Hu Huizhong*

(* Engineering Research Center for Metallurgical Automation and Measurement Technology of Ministry of Education, Wuhan University of Science and Technology, Wuhan 430081)

(** Hubei Province Key Laboratory of Systems Science in Metallurgical Process, Wuhan 430081)

Abstract

A control algorithm for trajectory tracking of the unmanned vehicle is proposed in this paper. The trajectory tracking control problem of unmanned vehicle, considering both safety and comfort, is transformed into multi-constraint model predictive control (MMPC) problem. The objective function and the variable constraints are transformed into the standard form of quadratic programming (QP) problem for which Lagrange multipliers act as decision variables, and a reversed solving method for multiplier is presented to obtain the approximate solution Lagrange multiplier, and then the solution of the control sequence is obtained. Compared with the conventional QP solving method, the proposed reversed method for multiplier can significantly improve the solving efficiency on the premise of guaranteeing the accuracy of the solution. The proposed MMPC controller for trajectory tracking of the unmanned vehicle is simulated on Carsim-Matlab simulation platform, and the simulation results show that the proposed control method has good tracking performance and real-time performance.

Key words: multi-constraint model predictive control (MMPC), trajectory tracking of unmanned vehicle, Lagrange multiplier, reversed solving method for multipliers