

增量自适应学习算法^①孙明轩^② 徐晨晨 邹胜祥

(浙江工业大学信息工程学院 杭州 310023)

摘 要 提出适用于参数不确定系统的增量自适应学习算法,为连续时间自适应控制系统提供了一种新的设计方法。针对现有积分自适应算法,首先指出其近似实现方式,即实现时采用的离散算法与原算法存在着差别。对于非限幅增量自适应学习算法,证明了闭环系统收敛性,并给出其参数估值性质;为了保证参数估值本身有界,提出限幅增量自适应学习算法,借助类 Barbalat 引理,获得闭环系统的收敛性结果。与积分自适应系统相比较,所提出学习算法规避了积分自适应律在实现时离散化造成的近似问题,从而能够有效处理参数不确定性。针对运动控制系统设计了增量自适应鲁棒控制器,并用于电机位置跟踪,实验结果验证了所提控制方法的有效性。

关键词 自适应控制;自适应鲁棒控制;连续时间系统

0 引言

积分自适应方法适用于连续时间参数系统,它提供的自适应机制在线调整控制器参数,以实现期望的控制性能。这种自适应方法的典型特征在于其积分自适应参数估计算法,可利用 Lyapunov 综合方法推导这种自适应律,并建立闭环系统稳定性与收敛性。积分自适应算法在相关文献中较为常见,关于它的详细理论(包括算法推导、算法性质)可参见文献[1,2]。由已发表文献可以看出,积分自适应方法在处理参数不确定性方面是十分有效的,通过算法形式的设置能够直接导致性能分析的完成。由于自适应算法的积分形式,实现时需要求解用于估值计算的积分方程,即需要进行离散近似。离散近似后的参数估值与积分自适应律所得结果是存在偏差的。已发表文献中提出了多种鲁棒自适应策略,可以使得积分自适应律在离散实现时仍能够保证闭环系统的控制性能^[2]。通过采取界已知的不确定

性鲁棒处理手段,文献[3]提出的自适应鲁棒控制方法能够预先规定系统性能,从而有效改进了闭环系统的瞬态性能。

迭代学习方法借鉴人们处理重复行为的做法,经由逐步学习过程不断改善、提高性能,如运动员的训练过程。迭代学习控制技术适于有限区间上重复运行的受控对象,通过学习可实现完全跟踪任务。值得借鉴之处在于学习算法的构造形式,它能够提供关于时变参数的估计,但每次作业完成后要求初始定位。重复控制是与迭代学习控制并行发展的领域,重复控制适于周期参考信号控制任务,可实现周期参考信号的渐近跟踪及周期干扰的抑制^[3-8]。自适应方法已被用于处理存在未知周期时变参数的情形,形成了自适应学习控制,其中的周期性自适应机制用于估计周期性时变参数。它适用于处理周期性干扰信号,因为这种干扰可以被认为是受控系统动态特性中的周期时变参数^[7-9]。学习控制器设计时的一个重要问题是估值限幅,通过限幅措施可以确保有界估计^[10-13]。这种控制技术在电机控制等工

① 国家自然科学基金(61573320)资助项目。

② 男,1961年生,博士,教授;研究方向:学习控制;联系人,E-mail: mxsun@zjut.edu.cn
(收稿日期:2019-06-13)

业场合已有应用报道^[14-17]。

借鉴上述学习控制方法,本文提出增量自适应学习策略,以推广学习控制的适用范围。具体地,增量自适应学习方法可应用于连续运行受控对象,其参考信号不要求为周期的。针对连续时间自适应系统,文中应用增量自适应学习策略,避免使用积分自适应律,从而规避了在实现积分自适应律时进行离散化带来的近似问题。文中提出具有未知常参数不确定系统的自适应学习控制算法,与通常自适应控制类似,适合于任何参考输入信号跟踪(除光滑性要求外),并未有周期性或重复性要求。本文详细分析了非限幅和限幅自适应学习机制,给出了数值仿真结果,并将其应用于实际运动控制装置。

1 问题的提出

考虑下述参数不确定动态系统:

$$\dot{x} = \theta^T \varphi(x) + u \quad (1)$$

其中, x 和 u 分别是标量状态和控制输入, θ 是 n_θ 维未知参数向量, $\varphi(\cdot)$ 是连续非线性函数向量。 θ 在式(1)的右端呈线性形式,这表明与传统自适应系统类似,本文也注重处理线性参数不确定性。本文的控制目标是,对于系统式(1),设计自适应控制器,使得系统状态收敛于0,即当 $t \rightarrow \infty$ 时, $x(t) \rightarrow 0$;同时,闭环系统中所有信号都是有界的。为了实现这一控制目标,本文提出设计控制器的增量自适应方法,而不是采用通常的积分自适应方法。

常规积分自适应控制器具有如下形式:

$$u = -\hat{\theta}^T \varphi(x) - \beta x, \beta > 0 \quad (2)$$

并采用下述自适应律:

$$\dot{\hat{\theta}} = \Gamma \varphi(x) x \quad (3)$$

其中, $\Gamma > 0$ 是对角矩阵, $\hat{\theta}$ 为 θ 的估计。记 $\tilde{\theta} = \theta - \hat{\theta}$ 为估计误差,应用控制律式(2),相应的闭环系统可表达为

$$\dot{x} = \tilde{\theta}^T \varphi(x) - \beta x \quad (4)$$

选取李雅普诺夫函数 $V = \frac{1}{2} \tilde{\theta}^T \Gamma^{-1} \tilde{\theta} + \frac{1}{2} x^2$,

利用式(3)和式(4), V 的导数可写为

$$\dot{V} = -\beta x^2 \quad (5)$$

因此, $V(t) \leq V(0)$; 由于 $x(0)$ 和 $\hat{\theta}(0)$ 有界,则 $x(t) \in L_\infty$ 及 $\theta(t) \in L_\infty$ 。进一步地,由式(2)及式(4)可知, $u(t) \in L_\infty$, $\dot{x}(t) \in L_\infty$ 。对式(5)两边同时求积分,可得:

$$\int_0^t x^2(s) ds = \frac{1}{\beta} (V(0) - V(t)) \leq \frac{1}{\beta} V(0)$$

它意味着 $x(t) \in L_2$ 。应用 Barbalat 引理,当 $t \rightarrow \infty$ 时, $x(t)$ 收敛到0,即 $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$ 。

式(3)被称为积分自适应律,这是因为它可写为

$$\hat{\theta}(t) = \hat{\theta}(0) + \int_0^t \Gamma \varphi(x(s)) x(s) ds$$

对于 $t > T$,

$$\hat{\theta}(t - T) = \hat{\theta}(0) + \int_0^{t-T} \Gamma \varphi(x(s)) x(s) ds$$

将上述两式相减,可得式(3)的增量形式为

$$\hat{\theta}(t) = \hat{\theta}(t - T) + \int_{t-T}^t \Gamma \varphi(x(s)) x(s) ds \quad (6)$$

利用积分中值定理:

$$\hat{\theta}(t) = \hat{\theta}(t - T) + T \Gamma \varphi(x(\xi)) x(\xi) \quad (7)$$

其中, ξ 位于 $t - T$ 和 t 之间的某个时刻。式(7)右边的第2项,其取值取决于 ξ ; 由于 ξ 的不确定性,在不同时刻这一项的取值也无法确定。由于实际控制系统中采用计算机技术,该积分自适应律在应用时只能近似实现,即 $x(\xi)$ 以 $x(t)$ 替代,也可以 $x(t - T)$ 替代。通常,闭环性能分析是针对式(3)进行的,或者是针对式(6)进行的,而不是针对替代后的闭环系统。因此,替代后的闭环系统性能尚无理论保证。本文拟探讨无需采用积分近似的自适应方法,以便规避实现积分自适应算法时遇到的问题,并分析其闭环系统控制性能。

2 增量自适应学习算法及其收敛性

本节给出的自适应系统设计采用了增量自适应方法,它不同于使用积分自适应算法的传统设计。本文将分别讨论未限幅和限幅自适应机制。

首先,考虑下述自适应律:

$$\hat{\theta}(t) = \begin{cases} \hat{\theta}(t-T) + \Gamma \varphi(x(t))x(t) & t \geq 0 \\ \hat{\theta}_0 & t \in [-T, 0) \end{cases} \quad (8)$$

其中, $\Gamma > 0$ 是对角矩阵, $\hat{\theta}_0$ 由设计者选择, 可取非 0 值, 以保证 $\hat{\theta}(t)$ 的连续性。

定理 1 对于由系统式(1)、控制律式(2)和自适应律式(8)组成的增量自适应系统有: (i) $x \in L_\infty$ 和 $\hat{\theta} \in L_{2T}$; (ii) $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$ 。

证明 选择下述 Lyapunov-Krasovski 泛函:

$$V(t) = \frac{1}{2} \int_{t-T}^t \tilde{\theta}^T(s) \Gamma^{-1} \tilde{\theta}(s) ds + \frac{1}{2} x^2(t) \quad (9)$$

它关于时间的导数为

$$\dot{V}(t) = \tilde{\theta}^T(t) \Gamma^{-1} \tilde{\theta}(t) - \tilde{\theta}^T(t-T) \Gamma^{-1} \tilde{\theta}(t-T) + x(t) \dot{x}(t)$$

利用下述等式:

$$\begin{aligned} & [\tilde{\theta}^T(t) \Gamma^{-1} \tilde{\theta}(t) - \tilde{\theta}^T(t-T) \Gamma^{-1} \tilde{\theta}(t-T)] \\ & + [\hat{\theta}(t) - \hat{\theta}(t-T)] \Gamma^{-1} [\hat{\theta}(t) - \hat{\theta}(t-T)] \\ & = -2 \tilde{\theta}^T(t) \Gamma^{-1} [\hat{\theta}(t) - \hat{\theta}(t-T)] \end{aligned}$$

可将 V 的导数表达为

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) = & -\frac{1}{2} [\hat{\theta}(t) - \hat{\theta}(t-T)] \Gamma^{-1} [\hat{\theta}(t) - \hat{\theta}(t-T)] \\ & - \tilde{\theta}^T \Gamma^{-1} [\hat{\theta}(t) - \hat{\theta}(t-T)] \\ & + \tilde{\theta}^T \varphi(x(t))x(t) - \beta x^2(t) \end{aligned} \quad (10)$$

利用自适应律式(8), 可将式(10)写为

$$\dot{V} = -\frac{1}{2} \varphi^T(x) \Gamma \varphi(x) x^2 - \beta x^2 \leq -\beta x^2 \quad (11)$$

由上式知, $\dot{V} \leq 0$, 因而, $V(t) \leq V(t-T)$ 。由于 $t \in [-T, 0)$ 时, $V(t)$ 有界, 可推知在 $t \in [0, \infty)$

时, $V(t) \in L_\infty$, 且 $x \in L_\infty$, $\int_{t-T}^t \tilde{\theta}^T(s) \tilde{\theta}(s) ds$ 是有界的, 即 $\hat{\theta} \in L_{2T}$, 证得结论(i)。对式(11)两端积分, 可得:

$$\int_{t-T}^t x^2(s) ds \leq V(t-T) - V(t)$$

可以得出, $x \in L_{2T}$ 。进一步地, 对于 $t \in [iT, (i+1)T]$, $t_0 = t - iT \in [0, T)$ 。

$$V(iT + t_0) \leq V(t_0) - \beta \sum_{j=1}^i \int_{(j-1)T+t_0}^{jT+t_0} x^2 d\tau$$

因而,

$$\sum_{j=1}^i \int_{(j-1)T+t_0}^{jT+t_0} x^2 d\tau \leq V(t_0)/\beta$$

由级数收敛的必要性条件可知:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_{t-T}^t x^2(s) ds = 0$$

利用不等式 $(a-b)^2 \leq 2a^2 + 2b^2$, 由式(4)得:

$$\dot{x}^2 \leq 2(\tilde{\theta}^T \varphi(x))^2 + 2\beta^2 x^2$$

由于 x 的有界性和 $\varphi(x)$ 的连续性, 存在常数 c_1 和 c_2 使得:

$$\int_{t-T}^t \dot{x}^2(s) ds \leq c_1 + c_2 \int_{t-T}^t \|\tilde{\theta}(s)\|^2 ds$$

这样, $\int_{t-T}^t \dot{x}^2(s) ds$ 有界。依据文献[13]中的引理 1, 可证得结论(ii)。

式(8)给出了一种增量形式的自适应律, 它在应用中可以直接实现, 无近似计算。不像式(6)那样含有积分运算, 实现时需近似计算积分。

在定理 1 中, $\hat{\theta} \in L_{2T}$, 其本身的有界性并未得到保证。通过改写自适应律式(8), 对于 $t_i = t_0 + iT$, $t_0 \in [0, T]$,

$$\hat{\theta}(t_i) = \hat{\theta}(t_0) + \Gamma \sum_{j=1}^i \varphi(x(t_j))x(t_j)$$

可以看出, 仅当 $x \in L_\infty$ 时, 并不能得到 $\hat{\theta}$ 的有界性, 它要求右端有限, 即要求级数 $\sum_{j=1}^i \varphi(x(t_j))x(t_j)$ 收敛。这也是本文考虑限幅自适应机制的主要动机。

通过在式(8)所示自适应律中引入饱和函数, 本文提出如下形式学习律:

$$\hat{\theta}(t) = \text{sat}_{\bar{\theta}}(\hat{\theta}^*(t)) \quad (12)$$

$$\hat{\theta}^*(t) = \text{sat}_{\bar{\theta}}(\hat{\theta}^*(t-T)) + \Gamma \varphi(x(t))x(t) \quad (13)$$

式中, $\bar{\theta}$ 表示饱和函数的限幅界限。式(12)的整个右侧被限幅, $\hat{\theta}$ 位于饱和界内。

定理 2 对于由系统式(1)、控制律式(2)和增

量自适应律式(12)和(13)组成的增量自适应系统有:(i) 闭环系统中的所有变量一致有界;(ii) $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$ 。

证明 利用式(4), V 的时间导数可表达为

$$\begin{aligned}\dot{V}(t) = & -\tilde{\theta}^T(t)\Gamma^{-1}[\hat{\theta}(t) - \hat{\theta}^*(t)] \\ & -\tilde{\theta}^T(t)\Gamma^{-1}[\hat{\theta}^* - \hat{\theta}(t-T)] \\ & -\frac{1}{2}[\hat{\theta}(t) - \hat{\theta}(t-T)]^T\Gamma^{-1} \\ & [\hat{\theta}(t) - \hat{\theta}(t-T)] + x(t)\dot{x}(t)\end{aligned}$$

依据文献[11]中引理1(取 $q_1 = 1, q_2 = 0$),

$$(\theta - \hat{\theta})^T\Gamma^{-1}(\hat{\theta}^* - \hat{\theta}) \leq 0$$

因此,

$$\begin{aligned}\dot{V}(t) \leq & -\frac{1}{2}[\hat{\theta}(t) - \hat{\theta}(t-T)]^T\Gamma^{-1}[\hat{\theta}(t) - \hat{\theta}(t-T)] \\ & -\tilde{\theta}^T(t)\Gamma^{-1}[\hat{\theta}^*(t) - \hat{\theta}(t-T)] \\ & +\tilde{\theta}^T\varphi(x(t))x(t) - \beta x^2(t)\end{aligned}$$

利用式(12)和式(13),得到:

$$\begin{aligned}\dot{V}(t) \leq & -\frac{1}{2}[\hat{\theta}(t) - \hat{\theta}(t-T)]^T\Gamma^{-1}[\hat{\theta}(t) - \hat{\theta}(t-T)] \\ & -\beta x^2(t) \leq -\beta x^2(t)\end{aligned}$$

至此,容易推出该自适应学习系统的稳定性和收敛性结果。

下面给出数值算例验证所提出的增量自适应学习算法。考虑含未知参数的动态系统式(1),其中,

$\theta = 3, \varphi(x) = \sin x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{5}x^3$ 。设定初始状态为

$x(0) = 4$ 。采用控制器式(2)以及自适应律式(12)、式(13),取控制器参数 $\beta = 2.5, \theta_{\min} = 0.00001, \theta_{\max} = 5, \Gamma = 0.002$ 。

仿真结果如图1~图3所示。从图1可以看出,系统状态在所提出的控制器作用下收敛;图2为控制输入信号;由增量自适应学习律给出的参数估值收敛性能如图3所示。

3 增量自适应鲁棒控制

这一节,本文将增量自适应方法应用于实际中

常见的运动控制系统。对于这类系统,自适应鲁棒控制是一种有效控制方法。

考虑下述不确定运动控制系统:

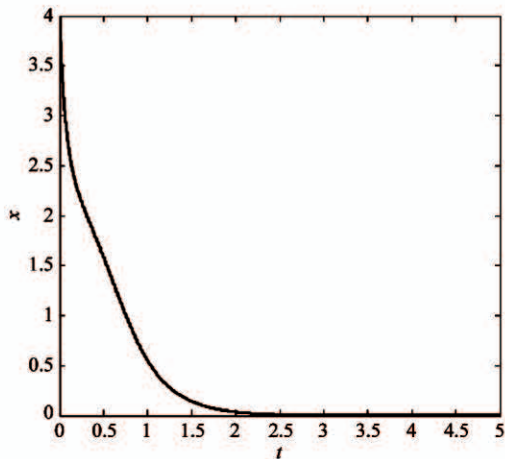


图1 系统状态 x

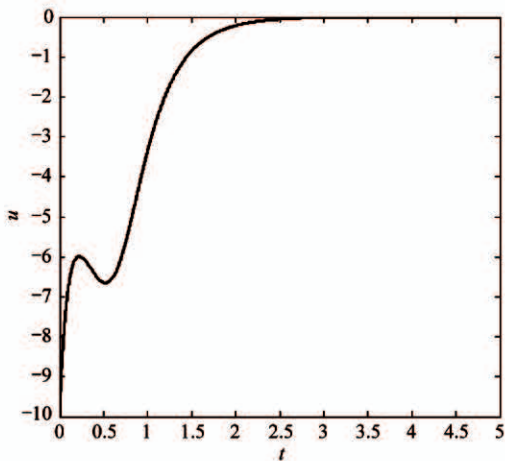


图2 控制输入 u

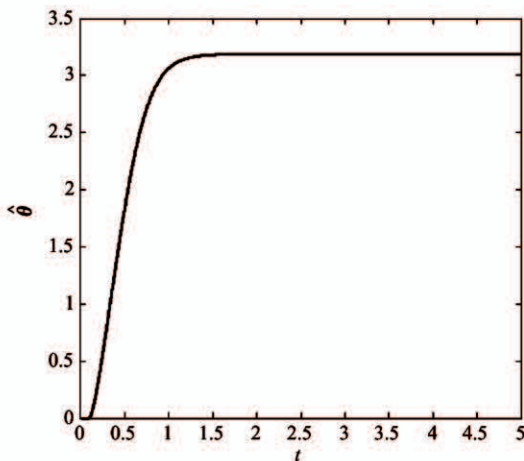


图3 参数 θ 的估计(其真值为3)

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ M\dot{x}_2 = u - Bx_2 + \Delta \end{cases} \quad (14)$$

其中, x_1 和 x_2 分别为系统位置与速度变量, u 是控制输入, M 为惯性负载的转动惯量, B 为粘滞摩擦系数, Δ 表示扰动、建模误差等集总不确定性。

为了表达简便, 定义参数 $\theta_1 = M$, $\theta_2 = B$, 可将式(14)写为

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \theta_1 \dot{x}_2 = u - \theta_2 x_2 + \Delta \end{cases} \quad (15)$$

对于未知参数及外部干扰, 假设其变化范围有界, 且界已知。

假设 1 在式(15)中:

$$\theta \in \Omega_\theta = \{\theta: 0 < \theta_{\min} < \theta < \theta_{\max}\} \quad (16)$$

$$\Delta \in \Omega_\Delta = \{\Delta: |\Delta| \leq \bar{\Delta}\} \quad (17)$$

其中, $\theta = [\theta_1, \theta_2]^T$ 表示参数向量, $\theta_{\min}$ 和 $\theta_{\max}$ 及 $\bar{\Delta}$ 已知。

给定位置参考轨迹 x_d , 本文的控制目标是设计控制输入 u , 使得系统实际位置尽可能跟踪上该参考轨迹。为了达到此控制目标, 本文采用增量自适应学习算法估计未知参数, 同时以鲁棒手段处理外部扰动, 设计增量自适应鲁棒控制器。

为此, 定义如下滤波误差函数:

$$e_f = k_1 e_1 + k_2 \dot{e}_1 = k_2 x_2 - x_{eq2} \quad (18)$$

其中, $k_1 > 0$, $k_2 > 0$, $e_1 = x_1 - x_d$, 以及 $x_{eq2} = k_2 \dot{x}_d - k_1 e_1$ 。

对式(18)求导, 并代入式(15)可得:

$$\theta_1 \dot{e}_f = k_2(u - \theta_2 x_2 + \Delta) - \theta_1 \dot{x}_{eq2} \quad (19)$$

考虑误差动态方程式(19), 本文设计如下自适应学习控制器:

$$u = u_a + u_r \quad (20)$$

$$u_a = \frac{1}{k_2} \hat{\theta}_1 \dot{x}_{eq2} + \hat{\theta}_2 x_2 \quad (21)$$

$$u_r = u_{s1} + u_{s2} \quad (22)$$

其中, u_a 为自适应控制项, $\hat{\theta}_1$ 为 θ_1 的估计值, $\hat{\theta}_2$ 为 θ_2 的估计, 其学习律分别为

$$\hat{\theta}_1(t) = \text{sat}(\hat{\theta}_1^*(t)) \quad (23)$$

$$\hat{\theta}_1^*(t) = \begin{cases} \text{sat}(\hat{\theta}_1^*(t-T)) - \gamma_1 e_f \dot{x}_{eq2} & t \in [T, \infty) \\ -\gamma_1 e_f \dot{x}_{eq2} & t \in [0, T) \end{cases} \quad (24)$$

$$\hat{\theta}_2(t) = \text{sat}(\hat{\theta}_2^*(t)) \quad (25)$$

$$\hat{\theta}_2^*(t) = \begin{cases} \text{sat}(\hat{\theta}_2^*(t-T)) - k_2 \gamma_2 e_f x_2 & t \in [T, \infty) \\ -k_2 \gamma_2 e_f x_2 & t \in [0, T) \end{cases} \quad (26)$$

这里, $\gamma_1, \gamma_2 > 0$ 为增益系数, $\text{sat}(\cdot)$ 为饱和函数。 u_r 为由 2 项组成的控制项, 比例反馈控制项 $u_{s1} = -k_s e_f$, $k_s > 0$, u_{s2} 为鲁棒控制项, 用于处理不确定性影响, 本文假定 u_{s2} 有界(在状态有界情形下)。与文献[3]中相似, 此项需满足以下条件:

$$P1: e_f(-\tilde{\theta}_1 \dot{x}_{eq2} - k_2 \tilde{\theta}_2 x_2 + k_2(\Delta + u_{s2})) \leq \varepsilon \quad (27)$$

$$P2: e_f u_{s2} \leq 0 \quad (28)$$

其中, $\varepsilon > 0$ 是一设计参数, $\tilde{\theta}_1 = \theta_1 - \hat{\theta}_1$ 与 $\tilde{\theta}_2 = \theta_2 - \hat{\theta}_2$ 为估计误差。

本文首先仅考虑存在参数不确定性的闭环系统收敛性能, 即考虑 $\Delta = 0$ 的情形。

定理 3 系统式(15)在控制律式(20)作用下, 当 $\Delta = 0$ 时, 闭环系统所有变量有界, 且跟踪误差渐近收敛于 0。

证明 选取如下 Lyapunov 泛函:

$$L(t) = \frac{1}{2} \theta_1 e_f^2 + \frac{1}{2\gamma_1} \int_{t-T}^t \tilde{\theta}_1^2 d\tau + \frac{1}{2\gamma_2} \int_{t-T}^t \tilde{\theta}_2^2 d\tau \quad (29)$$

为了分析收敛性能, 本文考查该泛函在整个周期上的差, 即 $\Delta L(t) = L(t) - L(t-T)$,

$$\begin{aligned} \Delta L(t) = & \frac{1}{2} \theta_1 e_f^2(t) - \frac{1}{2} \theta_1 e_f^2(t-T) \\ & - \frac{1}{2\gamma_1} \int_{t-T}^t \tilde{\theta}_1^2(\tau-T) d\tau - \frac{1}{2\gamma_2} \int_{t-T}^t \tilde{\theta}_2^2(\tau-T) d\tau \\ & + \frac{1}{2\gamma_1} \int_{t-T}^t \tilde{\theta}_1^2(\tau) d\tau + \frac{1}{2\gamma_2} \int_{t-T}^t \tilde{\theta}_2^2(\tau) d\tau \end{aligned} \quad (30)$$

当 $\Delta = 0$ 时, 对于上式右端的前 2 项, 依据条件式(28)可得:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \theta_1 e_f^2(t) - \frac{1}{2} \theta_1 e_f^2(t-T) \\ & = \int_{t-T}^t e_f [k_2 u_{s2} - k_2 k_s e_f - \tilde{\theta}_1 \dot{x}_{eq2} - k_2 \tilde{\theta}_2 x_2] d\tau \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \leq \int_{t-T}^t -k_2 k_s e_f^2 - e_f \dot{x}_{eq2} \tilde{\theta}_1 - k_2 e_f x_2 \tilde{\theta}_2 d\tau \\
& = \frac{1}{\gamma_1} \int_{t-T}^t (\hat{\theta}_1^*(\tau) - \text{sat}(\hat{\theta}_1^*(\tau - T))) \tilde{\theta}_1(\tau) d\tau \\
& \quad + \frac{1}{\gamma_2} \int_{t-T}^t (\hat{\theta}_2^*(\tau) - \text{sat}(\hat{\theta}_2^*(\tau - T))) \tilde{\theta}_2(\tau) d\tau \\
& \quad - \int_{t-T}^t k_2 k_s e_f^2 d\tau
\end{aligned} \quad (31)$$

进一步地,有下述关系式:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2\gamma_1} \tilde{\theta}_1^2(\tau) - \frac{1}{2\gamma_1} \tilde{\theta}_1^2(\tau - T) \\
& \leq -\frac{1}{\gamma_1} \tilde{\theta}_1(\tau) [\hat{\theta}_1(\tau) - \hat{\theta}_1(\tau - T)]
\end{aligned} \quad (32)$$

以及

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2\gamma_2} \tilde{\theta}_2^2(\tau) - \frac{1}{2\gamma_2} \tilde{\theta}_2^2(\tau - T) \\
& \leq -\frac{1}{\gamma_2} \tilde{\theta}_2(\tau) [\hat{\theta}_2(\tau) - \hat{\theta}_2(\tau - T)]
\end{aligned} \quad (33)$$

将式(31)~(33)代入式(30),可得:

$$\begin{aligned}
\Delta L(t) & \leq - \int_{t-T}^t k_2 k_s e_f^2 d\tau \\
& \quad + \frac{1}{\gamma_1} \int_{t-T}^t \tilde{\theta}_1(\tau) [\hat{\theta}_1^*(\tau) - \hat{\theta}_1(\tau)] d\tau \\
& \quad + \frac{1}{\gamma_2} \int_{t-T}^t \tilde{\theta}_2(\tau) [\hat{\theta}_2^*(\tau) - \hat{\theta}_2(\tau)] d\tau
\end{aligned} \quad (34)$$

依据文献[11]中引理1(取 $q_1 = 1, q_2 = 0$)可知:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\gamma_1} \tilde{\theta}_1(\tau) [\hat{\theta}_1^*(\tau) - \hat{\theta}_1(\tau)] \\
& = \frac{1}{\gamma_1} [\theta_1 - \text{sat}(\hat{\theta}_1^*(\tau))] [\hat{\theta}_1^*(\tau) - \text{sat}(\hat{\theta}_1^*(\tau))] \leq 0
\end{aligned}$$

以及

$$\frac{1}{\gamma_2} \tilde{\theta}_2(\tau) [\hat{\theta}_2^*(\tau) - \hat{\theta}_2(\tau)] \leq 0$$

这样,式(34)可写为

$$\Delta L(t) \leq -k_2 k_s \int_{t-T}^t e_f^2 d\tau \quad (35)$$

对于 $t \in [iT, (i+1)T]$, 记 $t_0 = t - iT \in [0, T]$, 可将 $L(t)$ 写为

$$L(t) = L(t_0) + \sum_{j=0}^{i-1} \Delta L(t - jT)$$

由式(35)可知:

$$L(t) \leq L(t_0) - k_2 k_s \sum_{j=0}^{i-1} \int_{t-(j+1)T}^{t-jT} e_f^2 d\tau \quad (36)$$

为了得到 $L(t)$ 的有界性,需先证得 $L(t_0)$ 是有界的,即,对于 $t \in [0, T]$, $L(t)$ 有界。由 $L(t)$ 的定义可知:

$$\begin{aligned}
L(t) & = \frac{1}{2} \theta_1 e_f^2 + \frac{1}{2\gamma_1} (T-t) \theta_1^2 + \frac{1}{2\gamma_1} \int_0^t \tilde{\theta}_1^2(\tau) d\tau \\
& \quad + \frac{1}{2\gamma_1} (T-t) \theta_2^2 + \frac{1}{2\gamma_2} \int_0^t \tilde{\theta}_2^2(\tau) d\tau
\end{aligned}$$

对上式关于时间求导:

$$\begin{aligned}
\dot{L}(t) & = e_f \theta_1 \dot{e}_f + \frac{1}{2\gamma_1} \tilde{\theta}_1^2 + \frac{1}{2\gamma_2} \tilde{\theta}_2^2 \\
& \leq -k_2 k_s e_f^2 + (\hat{\theta}_1^* + \frac{1}{2} \tilde{\theta}_1) \frac{1}{\gamma_1} \tilde{\theta}_1 \\
& \quad + (\hat{\theta}_2^* + \frac{1}{2} \tilde{\theta}_2) \frac{1}{\gamma_2} \tilde{\theta}_2
\end{aligned}$$

可以看出,由于估值 $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2$ 有界, $L(t)$ 在区间 $[0, T]$ 上有界。继而由式(36)可得 $L(t)$ 在区间 $[0, \infty)$ 上的有界性。进一步地,由式(18)及式(20)可推知,滤波误差 e_f 、状态 x 以及控制 u 均为有界的;由式(19)知 $\dot{e}_f$ 也是有界的。

根据级数收敛必要条件,再次利用式(36)可得, $\lim_{t \rightarrow \infty} \int_{t-T}^t e_f^2 d\tau = 0$ 。由于 $\dot{e}_f$ 有界,故 e_f 一致连续。根据类 Barbalat 引理^[15], e_f 一致收敛于0。依据 e_f 的定义可证得定理。

为了方便实现,本文需设计具体的鲁棒控制项 u_{s2} 。该项需满足条件 P1 和 P2, 本文设计 u_{s2} 为如下形式:

$$u_{s2} = -\frac{h^2 e_f}{k_2 (h |e_f| + \varepsilon)} \quad (37)$$

式中,取 h 满足:

$$\begin{aligned}
h & = |\dot{x}_{eq2}| + |\theta_{\max1} - \theta_{\min1}| + k_2 |x_2| + |\theta_{\max2} - \theta_{\min2}| \\
& \quad + k_2 \bar{\Delta}
\end{aligned} \quad (38)$$

这里,各界值定义见假设1。

定理4 系统式(15)在控制律式(20)作用下(采用式(37)给出的 u_{s2}), 当 $\Delta \neq 0$ 时,系统响应满

足下述微分不等式：

$$\dot{V} \leqslant -\beta V + \varepsilon \tag{39}$$

式中， $V = \frac{1}{2}\theta_1 e_f^2$ 。该函数最终收敛于邻域 $[0, \frac{\varepsilon}{\beta}]$ 内， $\beta = \frac{2k_2 k_s}{\theta_1}$ ，即最终一致有界。

证明 根据式(20)，对 V 求导可得：

$$\dot{V} = -k_2 k_s e_f^2 + e_f(\tilde{\theta}_1 \dot{x}_{eq2} + k_2 \tilde{\theta}_2 x_2 + k_2(\Delta + u_{s2}))$$

注意到 $e_f(-\tilde{\theta}_1 \dot{x}_{eq2} - k_2 \tilde{\theta}_2 x_2 + k_2(\Delta + u_{s2})) \leqslant \varepsilon$ 可得：

$$\dot{V} \leqslant -k_2 k_s e_f^2 + \varepsilon = -\beta V + \varepsilon$$

定理得证。

由定理 4 可以看出，在控制器式(20)中采用鲁棒控制项式(37)规定了闭环系统响应的瞬态过程，瞬态及稳态性能可以预先设定。这与常规自适应鲁棒控制方法是相同的。对于增量自适应学习算法（不同于积分自适应算法），本文证明了这种控制性能能够预先设定的特点。本文提出的控制方案并未要求参考轨迹是周期信号，这不同于重复控制方法。

4 算法实现

在电机实验装置上，实现本文提出的增量自适应学习控制方案，以便验证其控制效果。该实验装

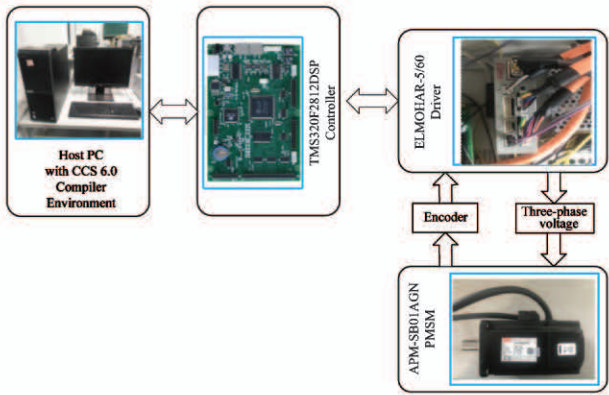


图 4 电机实验装置

置如图 4 所示，它以 TMS320F2812 控制器、ELMO HAR-5/60 驱动器、APM-SB01AGN 交流伺服电机构成闭环控制系统，完成位置跟踪控制过程，上位机作为运行监控设备。

实验中采用了 2 组期望轨迹，以便检验正弦信号跟踪与点到点控制效果。

采用式(20)~(22)和式(37)所给出的增量自适应鲁棒控制器，学习律为式(23)~(26)，参数设置为 $k_1 = 1$ ， $k_2 = 0.0001$ ， $k_s = 15$ ， $\varepsilon = 0.01$ ；取参数学习增益 $\gamma_1 = 10^{-7}$ ， $\gamma_2 = 10^{-6}$ ；取 $\theta_{\max} = [0.5, 0.5]^T$ ， $\theta_{\min} = [0.001, 0.001]^T$ ， $\bar{\Delta} = 5$ 。系统采样周期为 $T_s = 0.005$ s。

4.1 正弦信号跟踪

取正弦参考信号 $x_d(t) = 90\sin(\pi t)$ 。图 5~图 7 为采用增量自适应学习算法的跟踪控制结果。其

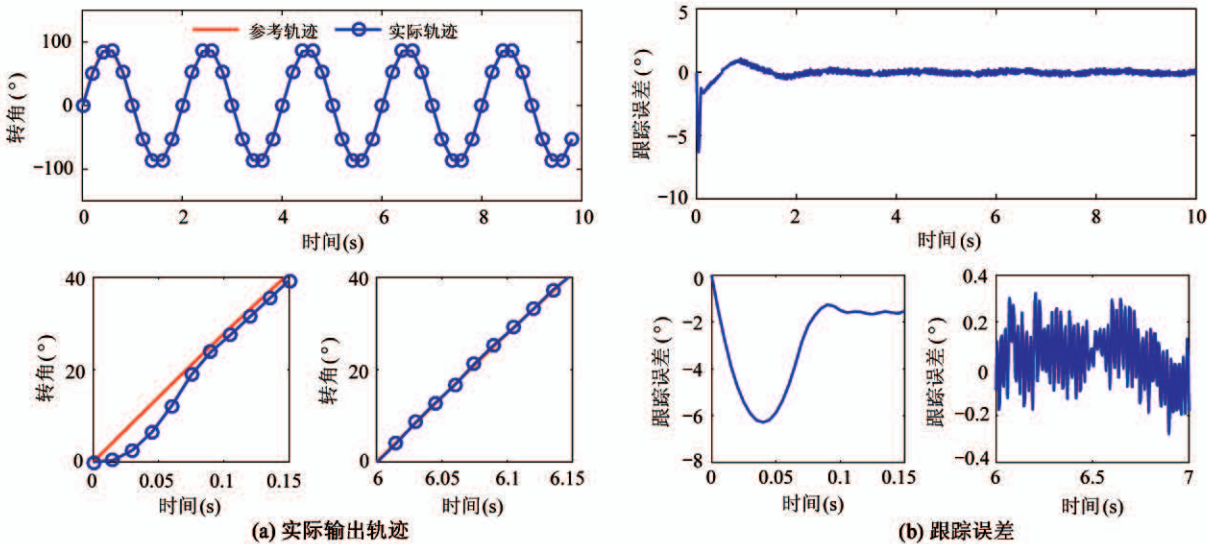


图 5 增量自适应学习控制下的实际输出轨迹与跟踪误差

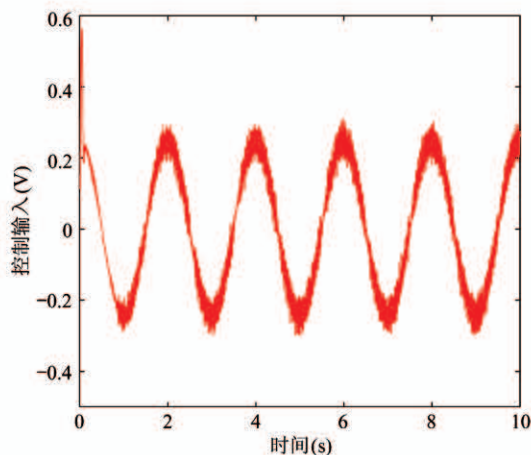


图6 控制输入

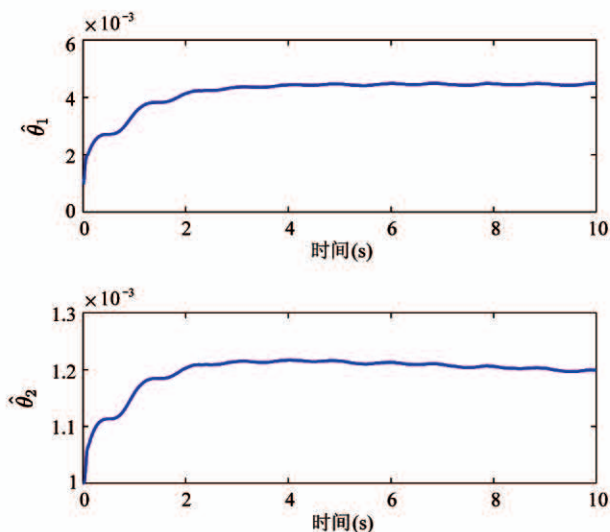
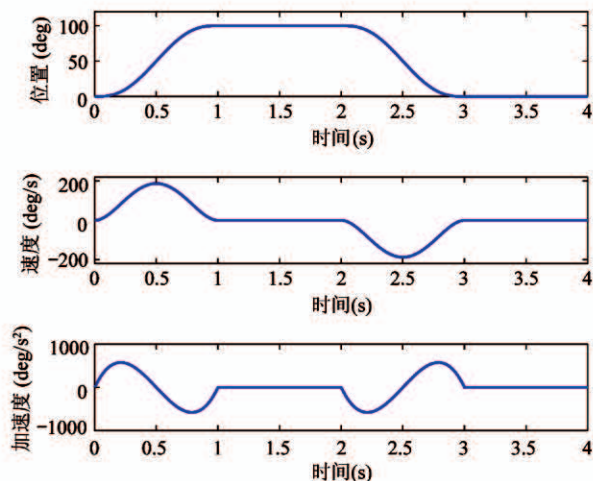
图7 参数 θ_1 和 θ_2 的估值

图8 点到点运动参考信号

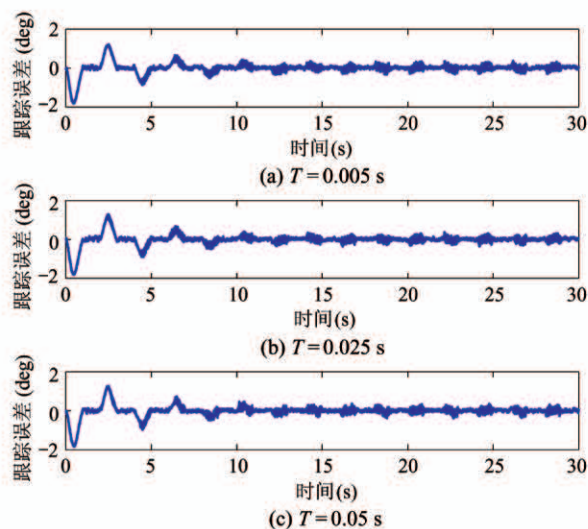


图9 跟踪误差

中,图5(a)分别给出实际输出信号与参考信号;图5(b)为跟踪误差。由图中可以看出,它最终收敛于 $-0.3520 \sim 0.3020$ deg;图6为控制输入;图7为参数 θ_1 和 θ_2 的估计,如图中所示,参数估值会逐渐趋于常值(或是在某邻域内波动),但无法确认参数估值是否收敛于真值,因为本文在保证稳定性与控制精度下,仅证明参数估值有界。

4.2 点到点控制

为了检验由式(23)~(26)所表示的增量自适应学习算法性能,在测试点到点控制性能时考虑以下3种学习周期: $T = T_s = 0.005$ s; $T = 5T_s = 0.025$ s; $T = 10T_s = 0.05$ s。

点到点参考信号如图8所示;图9分别给出3种学习周期下的跟踪误差,对于不同的学习周期,误

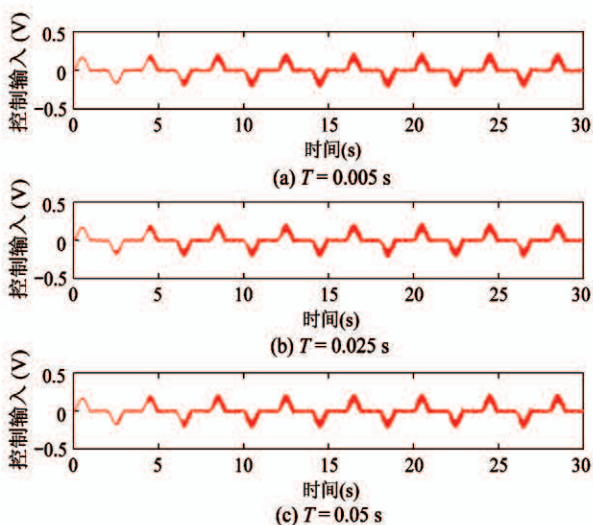


图10 控制输入

差最大峰值分别为 -1.8238 deg 、 -1.7990 deg 、 -1.8296 deg ,且跟踪误差分别收敛至 $[-0.3495, 0.3660]\text{ deg}$ 、 $[-0.3540, 0.3697]\text{ deg}$ 、 $[-0.3793, 0.3540]\text{ deg}$;图 10 为 3 种学习周期下的控制输入;图 11 和图 12 给出了不同学习周期下的参数 θ_1 和 θ_2 的估计。

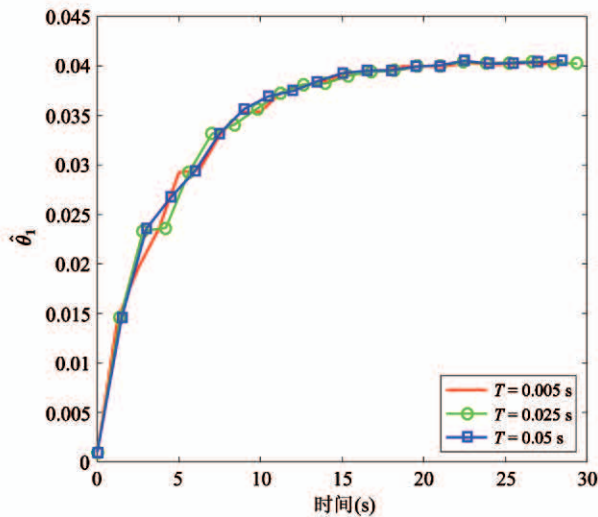


图 11 系统参数 θ_1 的估值

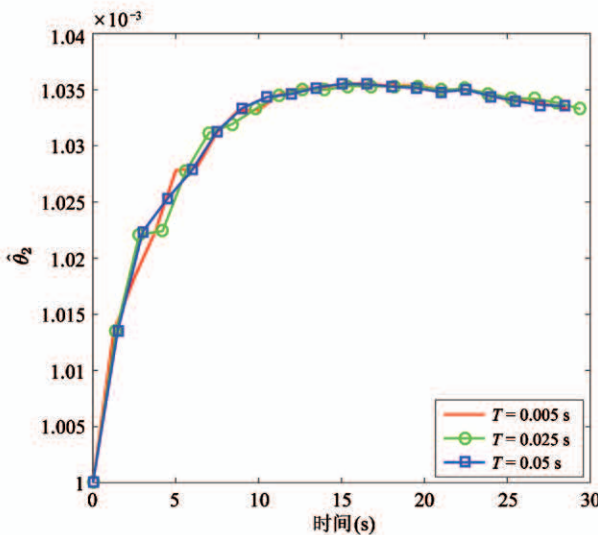


图 12 系统参数 θ_2 的估值

5 结论

本文提出了一种增量自适应学习策略,适用于连续时间自适应控制系统,它不同于传统自适应系统中采用的积分自适应算法,在实现时规避了像积

分自适应算法那样的离散化处理。为此,本文分析了积分自适应算法在应用时的近似实现方式。提出的增量自适应学习策略具有无限幅与限幅 2 种形式。本文证明了非限幅增量自适应系统的渐近收敛性,且估值在 L_{2T} 意义下有界。提出的限幅增量自适应学习算法,能够保证参数估值本身有界,并借助类 Barbalat 引理,证明了闭环系统收敛性。理论分析与实验结果表明,提出的增量自适应学习算法能够有效处理受控系统参数中的参数不确定性,也证明了引入限幅是获得有界估计的有效方法;更为重要的是,它规避了积分自适应算法的离散化实现方式。

参考文献

- [1] Krstic M, Kanellakopoulos I, Kokotovic P V. Nonlinear and Adaptive Control Design[M]. New York: John Wiley & Sons, 1995: 21-39
- [2] Ioannou P A, Sun J. Robust Adaptive Control[M]. Upper Saddle River, NJ: Prentice-Hall, 1996
- [3] Yao B. Desired compensation adaptive robust control[J]. *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, 2009, 131(6): 636-650
- [4] Sadegh N, Horowitz R, Kao W W, et al. A unified approach to design of adaptive and repetitive controllers for robotic manipulators [J]. *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, 1990, 112(4): 618-629
- [5] Moore J B, Horowitz R, Messner W. Functional persistence of excitation and observability for learning control systems[J]. *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, 1992, 114(3): 500-507
- [6] Jiang Y A, Clements D J, Hesketh T. Adaptive repetitive control of nonlinear systems[C]//Proceedings of the 34th Conference on Decision & Control, New Orleans, USA, 1995: 1708-1713
- [7] Dixon W E, Zergeroglu E, Dawson D M, et al. Repetitive learning control: a Lyapunov-based approach [J]. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, 2002, 32(4): 538-545
- [8] Xu J X. A new periodic adaptive control approach for time-varying parameters with known periodicity [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2004, 49(4): 579-583
- [9] Marino R, Tomei P. An iterative learning control for a

- class of partially feedback linearizable systems[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2009, 54(8): 1991-1996
- [10] Sun M, Ge S S. Adaptive rejection of periodic & non-periodic disturbances for a class of nonlinearly parametrized systems[C] //Proceedings of the 2004 American Control Conference, Boston, USA, 2004: 1229-1234
- [11] Sun M, Ge S S. Adaptive repetitive control for a class of nonlinearly parametrized systems[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2006, 51(10): 1684-1688
- [12] Sun M. A Barbalat-like lemma with its application to learning control [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2009, 54(9): 2222-2225
- [13] Sun M. Partial-period adaptive repetitive control by symmetry[J]. *Automatica*, 2012, 48(9): 2137-2144
- [14] Verrelli C M, Tomei P, Salis V, et al. Repetitive learning position control for full order model permanent magnet step motors[J]. *Automatica*, 2016, 63: 274-286
- [15] Salis V, Chiappinelli N, Costabeber A, et al. Learning position controls for hybrid step motors: from current-fed to full-order models[J]. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 2018, 65(8): 6120-6130
- [16] 赵富, 于志伟, 苏宝库. 改善低频线振动台加速度失真度的自适应重复学习控制[J]. 高技术通讯, 2010, 20(8): 868-874
- [17] 郑佳奇, 熊禾根, 陶永, 等. 鲁棒迭代学习控制在去毛刺机器人轨迹跟踪中的应用[J]. 高技术通讯, 2015, 25(12): 1062-1068

An incremental adaptive learning algorithms

Sun Mingxuan, Xu Chenchen, Zou Shengxiang

(College of Information Engineering, Zhejiang University of Technology, Hangzhou 310023)

Abstract

In this paper, an incremental adaptive learning algorithm for parametric uncertain systems is proposed, which puts forward a novel design methodology for continuous-time adaptive control systems. Firstly, the problem arisen from the implementation of the conventional integral adaptive system is pointed out, namely, the numerical integration procedure leading to the difference between the implemented and the original algorithms. The incremental adaptive learning algorithm is suggested to be used as an alternative, and for the unsaturated adaptation, the convergence of the closed-loop system and the estimation properties have been established. It has been shown that the saturation adaptation technique is able to assure bounded estimation, and the Barbalat-like lemma finalizes the analysis of convergence of the adaptive learning system undertaken. Compared with the integral adaptive system, the proposed learning algorithm avoids the problem arisen from the discretization for the integration, which can effectively deal with the parameter uncertainty. For the illustration, an incremental adaptive robust controller is designed for the uncertain motion systems, and a motor test bed is used for the verification of its feasibility and effectiveness.

Key words: adaptive learning control, adaptive robust control, continuous-time system