

基于旋量理论的混联拟人机械腿的运动学分析^①李研彪^② 陈科 孙鹏 王泽胜

(浙江工业大学机械学院 杭州 310032)

摘要 针对并联机构的强耦合性导致运动分析复杂化的问题,提出了一种包含部分解耦并联机构的新型 6 自由度混联拟人机械腿构型。首先,根据人体腿部的运动解剖特性,阐述了该混联机构的布局形式。其次,综合 Paden-Kahan 子问题与空间几何法,拓展了 Paden-Kahan 子问题在解决少自由度并联机构位置反解问题上的应用,求出了拟人机械腿的逆解方程;基于拟人机械腿机构的几何结构,采用代数法推导了位置正解的显示解析式。然后基于李代数 $se(3)$ 的双线性对称形式(Klein 型),推导出混联机械腿的运动学传递矩阵。最后通过数值算例验证了基于旋量理论建立的混联机械腿运动学模型的正确性,为该机构的进一步研究奠定了理论基础。

关键词 混联拟人机械腿;部分解耦;旋量理论;Klein 型;运动学

0 引言

拟人机器人一直以来是机器人领域研究的热点。机械腿在保持机器人身体运动平衡当中起到了至关重要的作用,其结构直接决定了机器人的运动学和动力学特征^[1]。目前,各国已相继研制出了不同类型的拟人机器人,如日本国家先进工业科学技术研究院的 HRP-5P^[2]、韩国科技先进研究院的 HUBO^[3]和国内清华大学的 THBIP-II^[4]。这些机器人腿部的各关节均采用多个由直流电机经谐波减速带动的转动副串联而成,而串联机构存在运动惯量大、累计误差大等不足^[5]。较少的拟人机械腿采用并联机构,如日本早稻田大学的 WL-16RIV^[6]和意大利卡西诺大学的 LARMBot^[7],虽然有效弥补了串联机构的缺点,但是其体积庞大,结构非拟人化,运动步长明显小于人的步长。为使串联机构与并联机构优势互补,研究人员开始研究混联式机械腿,如 SAFFiR 机器人^[8]、THOR 机器人^[9]和 7 自由度混联

机械腿^[10],其研究成果表明,混联机械腿更能模拟人体腿部肌肉驱动方式,从而进行稳步行走。

机器人的运动学分析是机器人机构设计和控制的重要组成部分。大多数研究者采用 Denavit-Hartenberg(DH)参数描述法建立不同机器人的运动学方程。然而,DH 参数法需要对每个连杆建立局部坐标系,通过坐标转换来建立运动学方程,建模过程十分繁琐。旋量理论是一种高效的数学工具,它以简洁的数学符号和明确的物理几何意义被广泛应用到机构学的研究领域。文献[11]提出了基于旋量理论与 Paden-Kahan 子问题求解混联机构位置反解的广义方法。文献[12]利用以李群、李代数为基础的旋量理论简化了并联机构运动学和动力学的求解过程。文献[13]基于旋量理论系统性地探讨了并联机构的输入端和输出端的运动/力传递特性,并定义了一系列评价指标。

由于并联机构具有强耦合性,其正运动学的求解是机构学研究中的难点之一,很多学者对此进行过深入的研究^[14-16],而混联机械腿中又包含多个并

① 国家自然科学基金(51975523,51475424)和浙江省自然科学基金杰出青年(LR18E050003)资助项目。

② 1978 生,男,博士,教授;研究方向:精密加工与机器人技术;联系人,E-mail: lybrory@zjut.edu.cn。
(收稿日期:2020-12-07)

联机构,这使得对混联机械腿的运动学分析更加艰巨。法国圣昆廷凡尔赛大学研制的 ROBIAN^[17],其腿部的髋关节与踝关节采用相同构型的并联机构,用末端运动分解的几何算法来求解正运动学。国内哈尔滨工程大学研制的 HEUBR_1^[18],其踝关节为 2PSS-U(P 为移动副,prismatic pair;U 为虎克铰,Hooke pair;S 为球铰副,spherical pair)并联机构,采用神经网络的多层前向传播网络来拟合正运动学的非线性函数。哈尔滨工业大学研制的液压驱动 6 自由度机械腿^[19],通过线性化处理来简化 2SPS-U 并联踝关节的运动学分析。虽然不同的混联机械腿可根据相应的算法进行运动学分析,但计算复杂,不易寻找可靠的算法,很难对机械腿进行精确的实时控制。运动解耦的并联机构能有效地改善这一问题^[20],但有关解耦并联机构在拟人机械腿上的应用鲜有报道。

本文提出一种新型串并混联拟人机械腿构型,采用 Paden-Kahan 子问题法结合空间几何法求解机械腿机构的位置反解;由于机械腿的髋关节机构与踝关节机构为含恰约束支链的解耦并联机构,根据解耦机构特性推导混联机械腿的位置正解表达式;利用李代数 $se(3)$ 的双线性对称形式(Klein 型),计算混联机构末端点的速度和加速度,并通过仿真验证机械腿运动学模型的正确性,为该机构的控制提供理论基础。

1 拟人机械腿的方案设计

1.1 拟人机械腿的构型分析

1.1.1 人体腿部运动解剖分析

人体腿部关节包括髋关节、膝关节和踝关节,其中髋关节具有 3 个球面转动自由度,绕冠状轴的弯曲和伸展、绕矢状轴的内收和外展以及绕垂直轴的外旋和内旋;膝关节具有单自由度转动;踝关节具有 2 个球面转动自由度,包括背伸、跖屈运动和外翻、内翻运动^[21]。

从运动形式上看,髋关节中的 2 个自由度方向的运动与踝关节具有相似性,因此在结构上采用球面 2 自由度并联机构实现踝关节运动以及髋关节的

2 个自由度方向的运动,而髋关节剩余的 1 个自由度可与单自由度膝关节组成串联机构。此外,机械腿需要有一定的灵活性以及较强的承载性。相对于旋转电机,直线推杆具有较大的驱动力和承载力,并且可将直线推杆安装在固定件上,与人体腿部关节不必承载具有驱动作用的肌肉的重量相似,机械腿也不必承受驱动装置的重量,降低了运动惯量。

1.1.2 并联机构的构型设计

传统的并联机构具有高耦合性,使得机构的运动分析复杂化。因此,本文设计了 PRC-PRCR-RR(R 为旋转副,rotating pair;C 为圆柱副,cylinder pair)部分解耦型球面 2 自由度并联机构,由静平台、动平台和 3 条运动支链构成,其机构简图如图 1 所示,三维模型图如图 2 所示。运动链 1 由移动杆 AB、连杆 BC 和动平台通过圆柱副连接而成。运动链 2 由移动杆 FG、连杆 GH、HI 和动平台通过转动副连接而成。运动链 3 由连杆 DE 和动平台通过转动副连接而成,并且轴线 OD 与轴线 OE 始终正交。

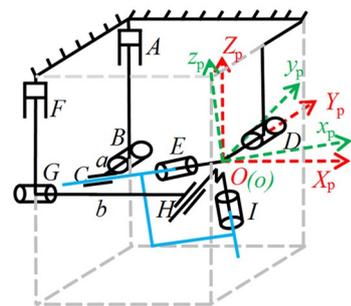


图 1 PRC-PRCR-RR 并联机构简图

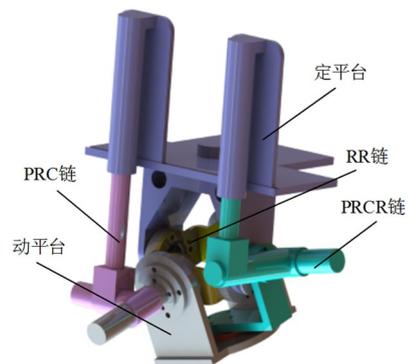


图 2 PRC-PRCR-RR 并联机构模型图

静坐标系为 $OX_pY_pZ_p$,其原点与旋转中心点 O 重合, Z_p 轴垂直于静平台,方向向上, Y_p 轴始终与

轴线 OD 重合, X_p 轴由右手螺旋定则确定。动坐标系为 $ox_p y_p z_p$, 其原点与旋转中心点 O 重合, z_p 轴始终与轴线 OI 重合, 方向向上, x_p 轴始终与轴 OE 重合, 方向由 E 指向 O , y_p 轴由右手螺旋定则确定。

推杆 AB 与推杆 FG 垂直于静平台以及连杆 BC 、 GH , 并且 2 个推杆形成的面始终平行于面 $OY_p Z_p$; 连杆 BC 垂直于连杆 GH ; 初始姿态下, 动坐标系与静坐标系重合, 连杆 BC 、 GH 、 DE 处于同一水平面内。其中, 连杆 BC 的长度为 a , 连杆 GH 的长度为 b , 圆柱副 C 到原点 O 的距离为 c , 圆柱副 H 到原点 O 的距离为 d 。

1.2 拟人机械腿的结构布局

拟人机械腿的三维模型如图 3 所示, 包括髋关节机构、膝关节机构以及踝关节机构 3 个部分。其中, 髋关节机构为 PRC-PRCR-RR 并联机构; 膝关节机构为两自由度转动机构, 由 1 个电机与转动导杆机构构成; 踝关节机构也采用 PRC-PRCR-RR 并联机构。将各关节机构依次串联构成一种新型混联拟人机械腿。

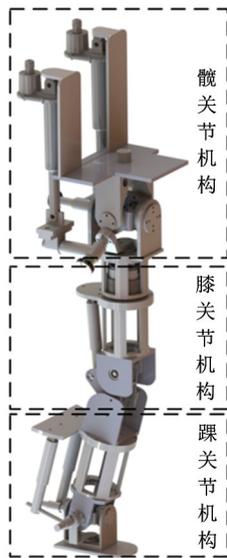


图 3 混联机械腿机构模型图

拟人机械腿的机构简图如图 4 所示, 静坐标系为 $OXYZ$, 其原点与髋关节机构的旋转中心点 O 重合, Z 轴垂直于髋关节机构静平台, 方向向上, Y 轴始终与轴线 OD_H 重合, X 轴由右手螺旋定则确定。动坐标系为 $oxyz$, 其原点与踝关节机构的旋转中心

点 o 重合, x 轴始终与轴线重合, y 轴始终与轴线 oD_A 重合, y 轴由右手螺旋定则确定。初始姿态下, 静坐标系与动坐标系姿态一致, OZ 轴与 oN 轴呈 15° 。

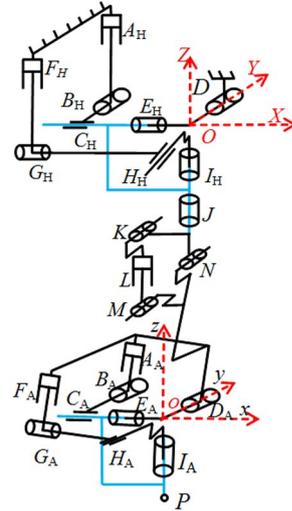


图 4 混联机械腿机构简图

2 拟人机械腿的位置反解

保持机构自由度的数量和性质不变, 将混联机械腿转换为串联机械腿。通过指数积公式建立等效串联机械腿的正运动学模型, 根据目标位姿矩阵利用 Paden-Kahan 子问题法求解等效串联机械腿的位置反解。将获得的等效串联关节理论值作为并联机构动平台的输出位姿, 进而求解并联机构各关节的位置反解。

2.1 等效串联机械腿的位置反解

根据机械腿的构型设计, 转换后的串联机构如图 5 所示, 各关节机构均等价于 2 自由度串联机构。因此, 整个混联机械腿等效为 6 自由度串联机构。

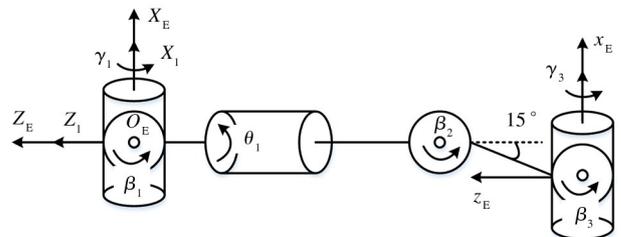


图 5 混联机械腿等效串联机构图

基于旋量理论与指数积公式^[22], 建立等效串联机械腿的正运动学模型。

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_1 = & \exp(\hat{\xi}_{y_1}^0, \beta_1) \cdot \exp(\hat{\xi}_{x_1}^0, \gamma_1) \cdot \exp(\hat{\xi}_{z_1}^0, \theta_1) \\ & \cdot \exp(\hat{\xi}_{y_2}^0, \beta_2) \cdot \exp(\hat{\xi}_{y_3}^0, \beta_3) \cdot \exp(\hat{\xi}_{x_3}^0, \gamma_3) \\ & \cdot \mathbf{g}_0(0) \end{aligned} \quad (1)$$

式中, $\hat{\xi}_{y_1}^0, \hat{\xi}_{x_1}^0, \hat{\xi}_{z_1}^0, \hat{\xi}_{y_2}^0, \hat{\xi}_{y_3}^0, \hat{\xi}_{x_3}^0$ 为各等效关节的初始运动旋量。

由于机构存在冗余自由度, 末端位置的位置反解存在无数解, 需给定 1 个输入参数值, 才可求出各个关节输入值的唯一解, 现假设 θ_1 为给定值。

2.1.1 求解 β_2

踝关节机构转动中心点 o 的齐次坐标为 \mathbf{p} , 将式两边同右乘 $\mathbf{g}_0(0)^{-1} \cdot \mathbf{p}$:

$$\begin{aligned} \exp(\hat{\xi}_{y_1}^0, \beta_1) \cdot \exp(\hat{\xi}_{x_1}^0, \gamma_1) \cdot \exp(\hat{\xi}_{z_1}^0, \theta_1) \cdot \exp(\hat{\xi}_{y_2}^0, \beta_2) \\ \cdot \mathbf{p} = \mathbf{g}_1 \cdot \mathbf{g}_0(0)^{-1} \cdot \mathbf{p} = \mathbf{g}_2 \end{aligned} \quad (2)$$

髌关节机构转动中心点 O 的齐次坐标为 \mathbf{q}_1 , 将式两边同减 \mathbf{q}_1 , 并取两边的二阶范数, 再根据 Paden-Kahan 子问题 3, 可得 β_2 。

2.1.2 求解 β_1, γ_1

将式(2)变换可得:

$$\exp(\hat{\xi}_{y_1}^0, \beta_1) \cdot \exp(\hat{\xi}_{x_1}^0, \gamma_1) \cdot \mathbf{p}_1 = \mathbf{g}_2 \quad (3)$$

式中, $\mathbf{p}_1 = \exp(\hat{\xi}_{z_1}^0, \theta_1) \cdot \exp(\hat{\xi}_{y_2}^0, \beta_2) \cdot \mathbf{p}$

根据 Paden-Kahan 子问题 2 求解式, 得 β_1, γ_1 。

2.1.3 求解 β_3, γ_3

将式(1)变换可得:

$$\exp(\hat{\xi}_{y_3}^0, \beta_3) \cdot \exp(\hat{\xi}_{x_3}^0, \gamma_3) = \mathbf{p}_2 \quad (4)$$

式中, $\mathbf{p}_2 = \exp(-\hat{\xi}_{y_2}^0, \beta_2) \cdot \exp(-\hat{\xi}_{z_1}^0, \theta_1) \cdot$

$\exp(-\hat{\xi}_{x_1}^0, \gamma_1) \cdot \exp(-\hat{\xi}_{y_1}^0, \beta_1) \cdot \mathbf{g}_1 \cdot \mathbf{g}_0(0)^{-1}$

设轴 x_E 和 y_E 外的 1 个参考点的齐次坐标为 \mathbf{p}_3 , 将式(4)两边同右乘 \mathbf{p}_3 , 再根据 Paden-Kahan 子问题 2, 可得 β_3, γ_3 。

至此等效串联机械腿的 6 个关节角度全部求解出来, 即获得髌关节机构动平台的输出角度、膝关节机构的输出角度以及踝关节机构动平台的输出角度。

2.2 并联关节机构的位置反解

PRC-PRCR-RR 并联机构为含恰约束支链的部分解耦型 2 自由度转动并联机构^[23], 当运动链 1 驱

使动平台绕轴 y_p 旋转时, 动平台不绕轴 x_p 旋转并且转动的角度与绕轴 x_p 转动的角度无关。因此, 可先对运动链 1 进行单独分析。

2.2.1 求解 Δl_1

设并联机构转动中心 O 的齐次坐标为 \mathbf{p}_4 , 并按照 2.1.1 的方式变换运动链 1 的正运动学模型

$$\begin{aligned} \exp(\hat{\xi}_{11}^0, r_A) \cdot \exp(\hat{\xi}_{12}^0, \theta_B) \cdot \exp(\hat{\xi}_{13}^0, r_{C_1}) \cdot \mathbf{p}_4 \\ = \mathbf{g}_1(\theta) \cdot \mathbf{g}_1(0)^{-1} \cdot \mathbf{p}_4 \end{aligned} \quad (5)$$

式中, $\hat{\xi}_{ij}^0$ 为并联机构第 i 条链上第 j 个运动副的初始运动旋量。

式(5)为 PRP 链的正运动学模型, 其几何意义为将圆柱副 C 轴线 OC 上的一点 p_4 沿着轴线 OC 移动 r_{C_1} 距离, 然后绕着旋转副 B 轴线 BC 旋转 θ_B 角度, 再沿着移动副 A 轴线 AB 方向移动 r_A 距离。如图 6 所示, S_1 表示轴 AB , S_2 表示轴 BC , S_3 表示轴 OC , 点 p_4 为最初的点, 点 p_7 为最终的点; 由几何关系可得点 p_4 始终在垂直于轴 S_2 的平面内运动, 并且 p_4 到 p_7 的路径有无数条, 说明此构型的 PRP 链具有冗余自由度, 无法仅采用 Paden-Kahan 子问题法求解位置反解。因此, 本文采用空间几何法与 Paden-Kahan 子问题法相结合求解位置反解。

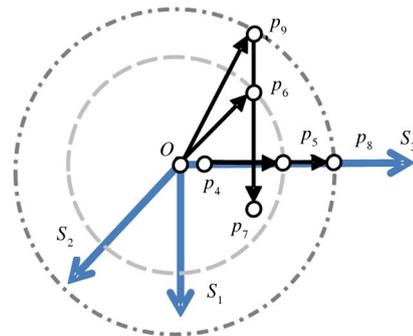
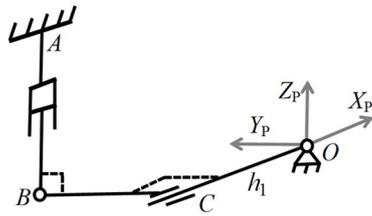


图 6 PRP 子问题几何图

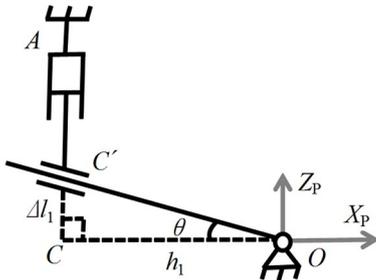
由于运动链 1 始终驱使动平台绕着轴 Y_p 旋转, 因此其运动特性等效为空间单自由度机构, 如图 7 所示, 该链驱使动平台在 $OX_p Z_p$ 平面内绕着 O 点做旋转运动, 根据机构各杆之间的几何关系, 可得:

$$\begin{cases} \Delta l_1 = r_A = h_1 \tan \theta \\ \theta_B = \theta = \beta_1 \\ r_{C_1} = h_1 / \cos \beta_1 - h_1 \\ \theta_{C_2} = \gamma_1 \end{cases} \quad (6)$$

式中, Δl_1 为移动杆移动的距离; h_1 为连杆 BC 到轴 Z_p 的垂直距离, θ 为杆 OC 绕 O 点旋转的角度。



(a) 等效运动轴测图



(b) 等效运动正视图

图7 PRC 链等效运动图

2.2.2 求解 Δl_2

将运动链 2 正运动学模型变换为

$$\exp(\hat{\xi}_{21}^0, r_F) \cdot \exp(\hat{\xi}_{22}^0, \theta_C) \cdot \exp(\hat{\xi}_{23}^0, r_{H_1}) \cdot p_4 = g_2(\theta) \cdot g_2(0)^{-1} \cdot p_4 \quad (7)$$

式(7)与式(5)是一致的,说明运动链 2 也无法仅应用 Paden-Kahan 法求解,需要结合机构自身的特性求解位置反解。运动链 2 中的 PRC 链驱使动平台在 OY_pZ_p 平面内绕着原点旋转,即始终绕着轴 X_p 旋转。对运动链 2 进行等效替换,在原点处构建轴线指向轴 X_p 的虚拟旋转副 J ,移除 PRC 链中的移动副 F 、转动副 G 以及圆柱副 H 中的移动副 H_1 ,其余的运动副(圆柱副 H 中的转动副 H_2 和转动副 I)与虚拟旋转副 J 组成新的虚拟运动链 RRR,如图 8 所示。此构型的虚拟运动链 RRR 驱使动平台的运动特性与运动链 PRCR 一致。

虚拟运动链 RRR 的正运动学模型为

$$g_2(\theta) = \exp(\hat{\xi}_{26}^0, \theta_2) \cdot \exp(\hat{\xi}_{24}^0, \theta_{H_2}) \cdot \exp(\hat{\xi}_{25}^0, \theta_I) \cdot g_2(0) \quad (8)$$

式中, ξ_{26}^0 为虚拟转动副 J 的初始运动旋量。

设 OI 轴上不在原点 O 处的 1 个参考点的齐次

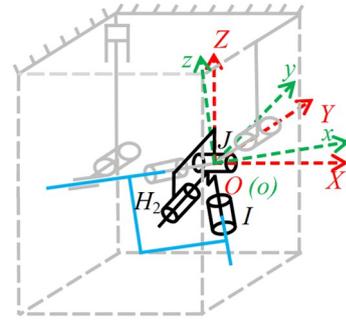


图8 虚拟运动链 RRR 机构图

坐标为 p_5 , 将式两边同右乘 $g_2(0)^{-1} \cdot p_5$, 变换成 Paden-Kahan 子问题 2 形式,由此求解出 θ_2 、 θ_{H_2} , 再将式(8)转变成 Paden-Kahan 子问题 1 形式,即可求解 θ_I 。

其中 θ_2 是第 2 条 PRCR 链中的 PRP 运动副驱使动平台在 OY_pZ_p 平面绕 O 点旋转的角度,其位置反解的求解方法于运动链 1 一致,故运动链 2 中其余运动副反解为

$$\begin{cases} \Delta l_2 = r_F = h_2 \tan \theta_2 \\ \theta_C = \theta_2 \\ r_{H_1} = h_2 / \cos \theta_2 - h_2 \end{cases} \quad (9)$$

将获得的髌关节机构动平台输出角度和踝关节机构动平台输出角度代入式(5)~式(9),即得髌关节机构与踝关节机构的位置反解。

2.3 膝关节机构的位置反解

膝关节机构为 2 自由度转动机构,其转动导杆机构如图 9 所示。已知 AB 为定长杆,长度为 l_1 , BC 为摇杆,长度为 r , θ 为初始角度。根据各杆件之间的几何关系,可得:

$$\beta_2 = \arccos \frac{l_1^2 + r^2 - (h_3 + \Delta h_3)^2}{2l_1 r} - \beta \quad (10)$$

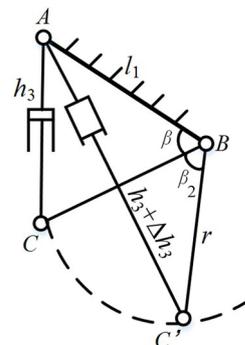


图9 膝关节机构简图

由于膝关节的正反解是容易求解的,但运算相对复杂,因此在以下分析中,将移除移动副,仅将转动副 B 作为主动副。

至此混联机械腿的6个主动关节的输入值全部求解出来,实现了混联机械腿的位置逆解算法。

3 拟人机械腿的位置正解

由于 PRC-PRCR-RR 并联机构中的第3条 RR 链为恰约束支链,故采用欧拉角 $(z-y-x)$ 描述动平台的位姿。设动平台绕动坐标系 y_p 轴、 x_p 轴旋转角度分别为 β_{p1} 、 γ_{p1} ,其姿态矩阵为

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_1 &= \mathbf{ROT}(y_p, \beta_{p1}) \cdot \mathbf{ROT}(x_p, \gamma_{p1}) \\ &= \begin{pmatrix} \cos\beta_{p1} & \sin\gamma_{p1} \cdot \sin\beta_{p1} & \cos\gamma_{p1} \cdot \sin\beta_{p1} \\ 0 & \cos\gamma_{p1} & -\sin\gamma_{p1} \\ -\sin\beta_{p1} & \cos\beta_{p1} \cdot \sin\gamma_{p1} & \cos\gamma_{p1} \cdot \cos\beta_{p1} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (11)$$

对于虚拟运动链 RRR,可采用欧拉角 $(x-y-z)$ 描述动平台的位姿。设动平台绕动坐标系 x_p 轴、 y_p 轴、 z_p 轴旋转角度分别为 γ_{p2} 、 β_{p2} 、 α_{p2} ,其姿态矩阵为

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_2 &= \mathbf{ROT}(x_p, \gamma_{p2}) \cdot \mathbf{ROT}(y_p, \beta_{p2}) \cdot \mathbf{ROT}(z_p, \alpha_{p2}) \\ &= \begin{pmatrix} a & d & \sin\beta_{p2} \\ b & e & -\cos\beta_{p2} \cdot \sin\gamma_{p2} \\ c & f & \cos\gamma_{p2} \cdot \cos\beta_{p2} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (12)$$

式中, $a = \cos\beta_{p2} \cdot \cos\alpha_{p2}$

$$b = \cos\gamma_{p2} \cdot \sin\alpha_{p2} + \cos\alpha_{p2} \cdot \sin\gamma_{p2} \cdot \sin\beta_{p2}$$

$$c = \sin\gamma_{p2} \cdot \sin\alpha_{p2} - \cos\gamma_{p2} \cdot \cos\alpha_{p2} \cdot \sin\beta_{p2}$$

$$d = -\cos\beta_{p2} \cdot \sin\alpha_{p2}$$

$$e = \cos\gamma_{p2} \cdot \cos\alpha_{p2} - \sin\gamma_{p2} \cdot \sin\beta_{p2} \cdot \sin\alpha_{p2}$$

$$f = \cos\alpha_{p2} \cdot \sin\gamma_{p2} + \cos\gamma_{p2} \cdot \sin\beta_{p2} \cdot \sin\alpha_{p2}$$

2条运动链对动平台的姿态变化一致,因此有

$\mathbf{R}_1 = \mathbf{R}_2$ 。分别取 \mathbf{R}_1 和 \mathbf{R}_2 第2行第1列的数:

$$\tan\gamma_{p2} = -\frac{\tan\alpha_{p2}}{\sin\beta_{p2}} \quad (13)$$

分别对两姿态矩阵第1行第1列的数与第1行第2列的数做比值:

$$-\tan\alpha_{p2} = \sin\gamma_{p1} \cdot \tan\beta_{p1} \quad (14)$$

联合式(6)、式(9)、式(13)、式(14),有:

$$\begin{cases} \beta_{p1} = \arctan \frac{\Delta l_1}{h_1} \\ \gamma_{p1} = \arctan \frac{\Delta l_2 \cdot \cos\beta_{p1}}{h_2} \end{cases} \quad (15)$$

由此也可得,该并联机构为部分解耦。

髋关节机构与踝关节机构的输入位移已知时,将其代入式(15),可得相应动平台的输出位姿,再根据式(1),即可得混联机械腿的位置正解。由于解耦并联机构的特点,该机械腿无需特殊的算法即可求解位置正解。

4 拟人机械腿的速度和加速度分析

4.1 并联机构的速度和加速度分析

通过旋量理论可求得串联机构速度雅克比矩阵,具体理论推导参考文献[22]。

对于并联机构中的少自由度运动链,可构建几个与原运动副线性无关的虚拟运动副,使之成为6自由度链,并设此虚拟运动副对应的角速度为0。设 ξ_{15}^* 、 ξ_{16}^* 为 PRC-PRCR-RR 并联机构第1条运动链中虚拟运动副的瞬时运动旋量, ξ_{26}^* 为第2条运动链中虚拟运动副的瞬时运动旋量,则这2条链的速度方程为

$$\begin{cases} \omega_{11}\xi_{11} + \omega_{12}\xi_{12} + \omega_{13}\xi_{13} + \omega_{14}\xi_{14} + \omega_{15}\xi_{15}^* + \omega_{16}\xi_{16}^* \\ \omega_{21}\xi_{21} + \omega_{22}\xi_{22} + \omega_{23}\xi_{23} + \omega_{24}\xi_{24} + \omega_{25}\xi_{25} + \omega_{26}\xi_{26}^* \end{cases} = \mathbf{V}_p \quad (16)$$

式中, ξ_{ij} 为第 i 条链中第 j 个运动副的瞬时运动旋量; \mathbf{V}_p 为并联机构末端杆上与空间坐标系原点重合的点的速度; ω_{ij} 为第 i 条链中第 j 个运动副的相对速度,其中 ω_{15} 、 ω_{16} 、 ω_{26} 始终为0。

对于恰约束运动支链3

$$\omega_{31}\xi_{31} + \omega_{32}\xi_{32} = \mathbf{V}_p \quad (17)$$

式中, ω_{31} 、 ω_{32} 为并联机构2自由度关节的相对速度,即动平台欧拉角 $(z-y-x)$ 的旋转角速度,其中 z 轴不旋转。

设旋量 ξ_{i0} 与对应支链中被动运动副旋量的互易积为0,而与对应支链中主动运动副旋量的互易

积为1,即

$$\begin{cases} \xi_{i1} \circ \xi_{i0} = 1 \\ \xi_{ij} \circ \xi_{i0} = 0 \end{cases} \quad i = 1, 2 \quad j = 2, 3, 4, 5, 6 \quad (18)$$

通过求解线性方程组式(18),可求得旋量 ξ_{10} 、 ξ_{20} 。

设旋量 ξ_{3k} ($k=3, 4, 5, 6$) 与第3条RR链的所有运动副旋量的互易积为0,即

$$\xi_{3i} \circ \xi_{3k} = 0 \quad (19)$$

通过求解线性方程组式(19),可求得旋量 ξ_{3k} ($k=3, 4, 5, 6$)。

根据李代数 $se(3)$ 的双线性对称形式(Klein型)公式,可得并联机构的6个速度辅助方程为

$$\begin{cases} \{\xi_{10}; \mathbf{V}_P\} = \omega_{11} & \{\xi_{20}; \mathbf{V}_P\} = \omega_{21} \\ \{\xi_{33}; \mathbf{V}_P\} = 0 & \{\xi_{34}; \mathbf{V}_P\} = 0 \\ \{\xi_{35}; \mathbf{V}_P\} = 0 & \{\xi_{36}; \mathbf{V}_P\} = 0 \end{cases} \quad (20)$$

将式(20)根据需要组合成矩阵形式,得到该并联机构的输入速度与参考坐标系原点重合点的6维速度量之间的映射。

$$\begin{cases} \mathbf{J}_P^T \Delta \mathbf{V}_P = \boldsymbol{\Omega} \\ \boldsymbol{\Omega} = (\omega_{11} \quad \omega_{21} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0)^T \\ \mathbf{J}_P = (\xi_{10} \quad \xi_{20} \quad \xi_{33} \quad \xi_{34} \quad \xi_{35} \quad \xi_{36}) \\ \Delta = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{I}_{3 \times 3} \\ \mathbf{I}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \end{pmatrix} \end{cases} \quad (21)$$

根据多刚体系统旋量加速度合成法则^[24]:

$$\mathbf{A}_{0n} = \sum_{i=0}^{n-1} \mathbf{A}_{i(i+1)} + \sum_{i=0}^{n-2} \sum_{j=i+1}^{n-1} \text{Lie}[\mathbf{V}_{i(i+1)}, \mathbf{V}_{j(j+1)}] \quad (22)$$

式中的第2项表示一条串行链上第 n 关节的瞬时运动旋量导数, $\text{Lie}[\]$ 为李括号运算,其运算结果为6维矢量。

应用本节求速度的方法,可得到该并联机构的输入加速度与参考坐标系原点重合点的6维加速度量之间的映射。

$$\begin{cases} \mathbf{J}_P^T \Delta \mathbf{A}_P = \dot{\boldsymbol{\Omega}} + \mathbf{S} \\ \mathbf{S} = (\{\xi_{i0}; \xi_{Li}\} \quad \{\xi_{3j}; \xi_{L3}\})^T \\ i = 1, 2 \quad j = 3, 4, 5, 6 \end{cases} \quad (23)$$

式中, \mathbf{S} 为6维矢量, ξ_{Lk} ($k=1, 2, 3$) 为对应支链末关节的瞬时运动旋量导数。

4.2 拟人机械腿的速度分析

髋关节机构与踝关节机构的速度映射为

$$\begin{cases} \mathbf{J}_H^T \Delta \mathbf{V}_H = (\omega_{H11} \quad \omega_{H21} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0)^T \\ \mathbf{J}_H = (\xi_{H10} \quad \xi_{H20} \quad \xi_{H33} \quad \xi_{H34} \quad \xi_{H35} \quad \xi_{H36}) \\ \mathbf{J}_A^T \Delta \mathbf{V}_A = (0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad \omega_{A11} \quad \omega_{A21})^T \\ \mathbf{J}_A = (\xi_{A33} \quad \xi_{A34} \quad \xi_{A35} \quad \xi_{A36} \quad \xi_{A10} \quad \xi_{A20}) \end{cases} \quad (24)$$

式中, \mathbf{V}_H 为髋关节机构中动平台上与原点重合点的速度, \mathbf{V}_A 为踝关节机构中动平台上与原点重合点的速度, ω_{H11} 、 ω_{H21} 、 ω_{A11} 、 ω_{A21} 为各关节机构的输入速度。

混联机械腿的速度方程为

$$\begin{cases} \mathbf{J}_{HY} \boldsymbol{\Omega}_{HY} = \mathbf{V}_{HY} \\ \mathbf{J}_{HY} = (\xi_{Y1} \quad \xi_{X1} \quad \xi_{Z1} \quad \xi_{Y2} \quad \xi_{Y3} \quad \xi_{X3}) \\ \boldsymbol{\Omega}_{HY} = (\omega_{Y1} \quad \omega_{X1} \quad \omega_{Z1} \quad \omega_{Y2} \quad \omega_{Y3} \quad \omega_{X3})^T \end{cases} \quad (25)$$

式中, $\boldsymbol{\Omega}_{HY}$ 为各等效串联关节的角速度; \mathbf{V}_{HY} 为机械腿末端杆上与原点重合点的速度。

联合式(24),得:

$$\begin{cases} \boldsymbol{\Omega}_{HY} = \mathbf{J}_{HY}^{-1} \mathbf{V}_{HY} \\ \mathbf{J}_{HYA} = \mathbf{J}_A^T \Delta \mathbf{J}_A^3 \\ \mathbf{J}_{HYH} = \mathbf{J}_H^T \Delta \mathbf{J}_H^3 \\ \mathbf{J}_{HYK} = \mathbf{I} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T \end{cases} \quad (26)$$

式中, \mathbf{J}_H^3 为髋关节机构中第3条RR链的瞬时运动旋量系; \mathbf{J}_A^3 为踝关节机构中第3条RR链的瞬时运动旋量系。

由此可得混联机械腿输入速度与参考坐标系原点重合点的6维速度量之间的映射。

$$\begin{cases} \boldsymbol{\omega}_{HY} = (\mathbf{J}_{HYH} \quad \mathbf{J}_{HYK} \quad \mathbf{J}_{HYK}) \cdot \mathbf{J}_{HY}^{-1} \cdot \mathbf{V}_{HY} \\ \boldsymbol{\omega}_{HY} = (\omega_{H11} \quad \omega_{H21} \quad \omega_{Z1} \quad \omega_{Y2} \quad \omega_{A11} \quad \omega_{A21})^T \end{cases} \quad (27)$$

机械腿末端参考点的角速度就是 \mathbf{V}_{HY} 的原部,其线速度可表示为

$$\mathbf{V}_i = \mathbf{v}(\mathbf{V}_{HY}) + \boldsymbol{\omega}(\mathbf{V}_{HY}) \cdot \mathbf{r}_i \quad (28)$$

式中, \mathbf{V}_i 为机械腿末端参考点线速度, $\mathbf{v}(\mathbf{V}_{HY})$ 为 \mathbf{V}_{HY} 的对偶部, $\boldsymbol{\omega}(\mathbf{V}_{HY})$ 为 \mathbf{V}_{HY} 的原部, \mathbf{r}_i 为坐标原点

到末端参考点位置的坐标矢量。

4.3 拟人机械腿的加速度分析

髌关节机构与踝关节机构的加速度映射为

$$\begin{cases} J_H^T \Delta A_H = \dot{\Omega}_H + S_H \\ J_A^T \Delta A_A = \dot{\Omega}_A + S_A \end{cases} \quad (29)$$

混联机械腿的加速度方程为

$$\begin{cases} J_{HY} \Omega_{HY} = A_{HY} - \xi_{LHY} \\ \dot{\Omega}_{HY} = (\dot{\omega}_{Y1} \quad \dot{\omega}_{X1} \quad \dot{\omega}_{Z1} \quad \dot{\omega}_{Y2} \quad \dot{\omega}_{Y3} \quad \dot{\omega}_{X3})^T \end{cases} \quad (30)$$

式中, A_{HY} 为混联机械腿末端杆件与坐标系原点重合点的 6 维加速度量; ξ_{LHY} 为机械腿等效串联机构的瞬时运动旋量导数。

当 A_{HY} 已知且 J_{HY} 非奇异时, 可得各等效关节的加速度为

$$\dot{\Omega}_{HY} = J_{HY}^{-1} \cdot (A_{HY} - \xi_{LHY}) \quad (31)$$

联合式(27)、式(29)、式(31), 可得混联机械腿输入加速度与参考坐标系原点重合点的 6 维加速度量之间的映射。

$$\begin{cases} \dot{\omega}_{HY} + S_{HY} = \\ (J_{HYH} \quad J_{HYK} \quad J_{HYA}) \cdot J_{HY}^{-1} \cdot (A_{HY} - \xi_{LHY}) \\ S_{HY} = S_H + S_A - J_H^T \Delta \xi_{L3H} - J_A^T \Delta \xi_{L3A} \end{cases} \quad (32)$$

式中, ξ_{L3H} 为髌关节第 3 条支链的瞬时运动旋量导数, ξ_{L3A} 为踝关节第 3 条支链的瞬时运动旋量导数。

机械腿末端参考点的角加速度就是 A_{HY} 的原部, 其线速度可表示为

$$\begin{aligned} A_i &= (a(A_{HY}) + \omega_i \times v_i) \\ &+ (\varepsilon(A_{HY}) \times r_i) + (\omega_i \times (\omega_i \times v_i)) \end{aligned} \quad (33)$$

式中, A_i 为机械腿末端参考点线速度, $a(A_{HY})$ 为 A_{HY} 的对偶部, $\varepsilon(A_{HY})$ 为 A_{HY} 的原部。

5 仿真实验

为了验证上述方法对混联机械腿运动学分析的正确性, 基于上述模型, 利用 Matlab 软件验证该机构的位置解析, 利用 Adams 仿真得到的末端 P 的速度、加速度数据与理论计算值进行比较。机构的结

构参数如表 1 所示。

表 1 机械腿结构参数

关键点	坐标 X/mm	坐标 Y/mm	坐标 Z/mm
B_H	-99	55	0
C_H	-99	0	0
D_H	0	47.5	0
E_H	-47.5	0	0
G_H	-99	-110	0
H_H	0	-110	0
I_H	0	0	-68
J	0	0	-169
N	0	0	-328
B_A	-168.23	25	-646.76
C_A	-126.41	0	-646.76
D_A	-85.41	41	-646.76
E_A	-168.23	0	-646.76
G_A	-162.68	-90	-626.05
H_A	-85.41	-90	-646.76
I_A	-85.41	0	-696.76
P	-85.41	0	-717.76

各驱动器的表达式为

$$\begin{cases} l_{H1} = 30 \sin(\pi \cdot t/5) \\ l_{H2} = -40 \sin(\pi \cdot t/5) \\ r_{H3} = 0 \\ r_{K4} = 30 \cos(\pi \cdot t/5) \\ l_{A5} = -20 \sin(\pi \cdot t/5) \\ l_{A6} = 15 \sin(\pi \cdot t/5) \end{cases} \quad (34)$$

位置解析式的验证步骤如图 10 所示, 对比结果如图 11 所示; 速度、加速度验证步骤如图 12 所示; 数值计算结果如图 13 所示, 对比结果如图 14 所示; 结果表明位移、角速度、角加速度、线速度、线加速度

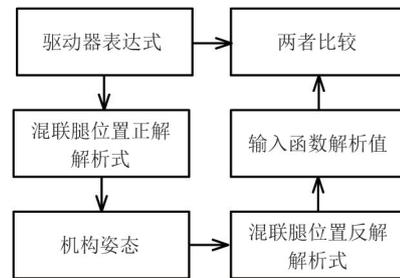


图 10 位置解析验证步骤

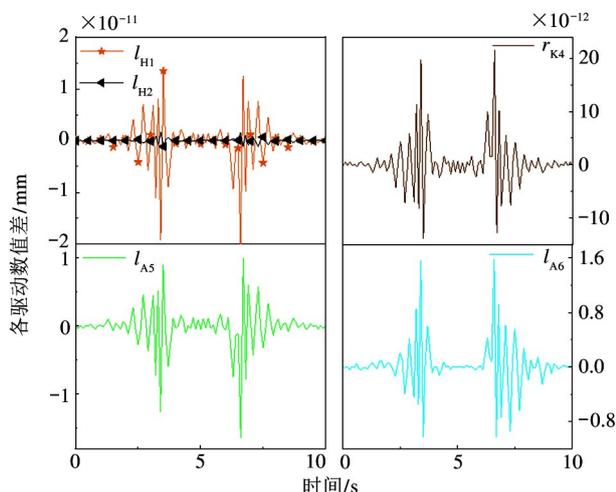


图 11 各驱动器位置解误差

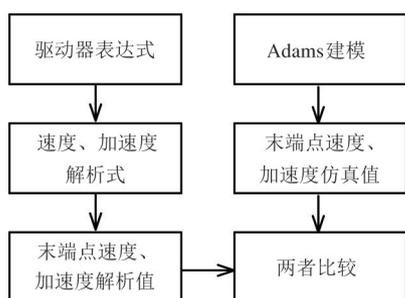


图 12 速度、加速度验证步骤

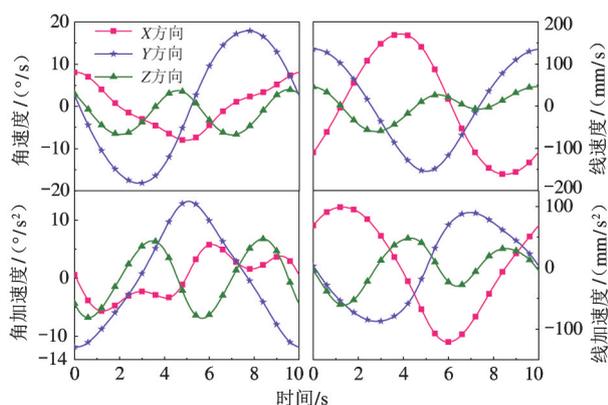


图 13 使用旋量理论计算速度、加速度

的最大误差分别为 $1.5 \times 10^{-11} \text{ mm}$ 、 $-4.6 \times 10^{-6} \text{ }^\circ/\text{s}$ 、 $2.8 \times 10^{-6} \text{ }^\circ/\text{s}^2$ 、 $1.5 \times 10^{-3} \text{ mm/s}$ 、 $9 \times 10^{-4} \text{ mm/s}^2$, 位移误差值很小, 速度与加速度存在一定的偏差, 但最小的误差数量级为 10^{-4} , 可以忽略不计, 从而验证了机械腿运动学模型的正确性。

6 结论

(1) 本文基于人体腿部的运动分析, 提出了一

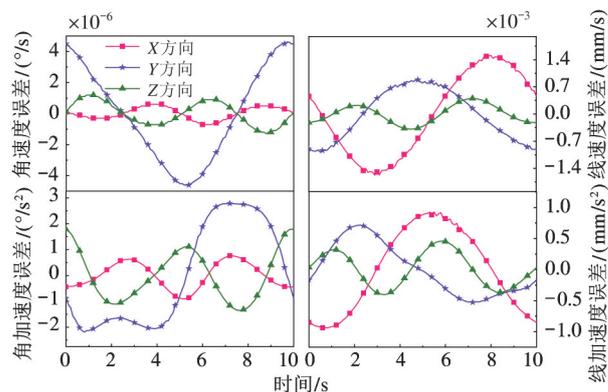


图 14 理论计算与 Adams 仿真的误差

种新型混联拟人机械腿构型, 因其并联关节均为 2 自由度部分解耦并联机构, 无需采用复杂的求解算法, 因此易于运动学解算。

(2) 阐述了机械腿的布局形式, 结合空间几何法与 Paden-Kahan 子问题, 弥补了 Paden-Kahan 子问题无法解决冗余运动链位置反解的不足, 给出了拟人机械腿的位置反解方程。该方法物理意义明确, 计算量少, 易于编程; 鉴于机构的几何特性, 采用代数法推导了位置正解显式表达式。

(3) 结合旋量理论和 Klein 型对该混联机械腿的运动学传递矩阵进行了推导, 得到了腿部末端点的速度与加速度, 该方法无需计算并联机构中各支链被动关节的速度与加速度, 简化了运算过程。

(4) 通过理论分析和虚拟样机仿真, 验证了基于旋量理论建立的混联拟人机械腿运动学模型的正确性和有效性, 为该机构后续的研究奠定了理论基础。

参考文献

- [1] 秦现生, 张雪峰, 谭小群, 等. 类哺乳动物腿式机器人研究综述[J]. 中国机械工程, 2013, 24(6): 841-851
- [2] KANEKO K, KAMINAGA H, SAKAGUCHI T, et al. Humanoid robot HRP-5P: an electrically actuated humanoid robot with high power and wide range joints[J]. *IEEE Robotics and Automation Letter*, 2019, 4(2): 1431-1438
- [3] PARK I W, KIM J Y, OH J H. Online biped walking pattern generation for humanoid robot KHR-3 (KAIST Humanoid Robot-3: HUBO) [C] // Proceedings of the IEEE International Conference on Humanoid Robot, Daejeon, Korea, 2006: 398-403
- [4] 伊强, 陈息, 刘莉, 等. 小型仿人机器人 THBIP-II 的研制与开发[J]. 机器人, 2009, 31(6): 586-593

- [5] MIAO Z H, YAO Y A, KONG X W. Biped walking robot based on a 2-UPU + 2-UU parallel mechanism [J]. *Chinese Journal of Mechanical Engineering*, 2014, 27 (2) : 269-278
- [6] 王洪波, 齐政彦, 胡正伟, 等. 并联腿机构在四足/两足可重组步行机器人中的应用 [J]. *机械工程学报*, 2009, 45 (8) : 24-30
- [7] CAFOLLA D, WANG M F, CARBONE G, et al. LARM-bot: a new humanoid robot with parallel mechanisms [C] // *Proceedings of the 21st CISM-IFTOMM Symposium*, Udine, Italy, 2016 : 275-283
- [8] LAHR D F, YI H, HONG D W. Biologically inspired design of a parallel actuated humanoid robot [J]. *Advanced Robot*, 2016, 30 (2) : 109-118
- [9] HOPKINS A, LEONESSA A, LATTIMER Y, et al. Optimization-based whole-body control of a series elastic humanoid robot [J]. *International Journal of Humanoid Robotics*, 2015, 12 (1) : 1-34
- [10] LI Y B, SUN P, QI H, et al. Prototyping of a novel anthropomorphic mechanical leg [J]. *Advances in Mechanical Engineering*, 2019, 11 (12) : 1-12
- [11] SUN P, LI Y B, WANG Z S, et al. Inverse displacement analysis of a novel hybrid humanoid robotic arm [J]. *Mechanism and Machine Theory*, 2020, 147 : 1-21
- [12] ZHAO T S, GENG M C, CHEN Y H, et al. Kinematics and dynamics Hessian matrices of manipulators based on screw theory [J]. *Chinese Journal of Mechanical Engineering*, 2015, 28 (2) : 226-235
- [13] WANG J S, WU C, LIU X J. Performance evaluation of parallel manipulators: motion/force transmissibility and its index [J]. *Mechanism and Machine Theory*, 2010, 45 : 1462-1476
- [14] 方斌, 李剑锋. I4R 并联机器人机构的位置解析和奇异性分析 [J]. *高技术通讯*, 2010, 20 (10) : 1080-1085
- [15] 谢志江, 梁欢, 宋代平. 基于连续蚁群算法的 3-RPS 并联机构正解 [J]. *中国机械工程*, 2015, 26 (6) : 799-803
- [16] 程世利, 吴洪涛, 王超群, 等. 基于正交补的 6-3 Stewart 并联机构运动学正解 [J]. *中国机械工程*, 2011, 22 (5) : 505-509
- [17] SELLAOUTI R, OUEZDOU F B. Design and control of a 3DOFs parallel actuated mechanism for biped application [J]. *Mechanism and Machine Theory*, 2005, 40 (12) : 1367-1393
- [18] 俞志伟. 双足机器人仿生机构设计与运动仿真 [D]. 哈尔滨: 哈尔滨工程大学机电工程学院, 2006 : 36-43
- [19] LUO J W, FU Y L, WANG S G. Design and walking control implementation of a hydraulic humanoid biped robot [J]. *International Journal of Mechanical Engineering and Automation*, 2017, 4 (2) : 15-25
- [20] 窦玉超, 曾达幸, 李明洋, 等. 一种两转一移完全解耦并联机器人机构及其特性分析 [J]. *中国机械工程*, 2014, 25 (2) : 241-245
- [21] 布朗蒂娜·卡莱-热尔曼. 运动解剖书: 运动者最终要读的身体技能解析书 [M]. 张芳, 译. 北京: 北京科学技术出版社, 2015 : 102-137
- [22] MURRAY R M, SASTRY S S, LI Z X. A Mathematical Introduction to Robotic Manipulation [M]. Boca Raton: CRC Press, 1994 : 11-101
- [23] 许允斗, 全少帅, 王贝. 一类两转动自由度完全解耦的三支链两转一移并联机构 [J]. *机械设计*, 2019, 36 (5) : 25-29
- [24] 韩博, 韩媛媛, 许允斗, 等. 基于螺旋理论的四面体可展机构运动特性与动力学分析 [J]. *机器人*, 2020, 42 (1) : 21-28

Kinematic analysis of a hybrid humanoid mechanical leg based on screw theory

LI Yanbiao, CHEN Ke, SUN Peng, WANG Zesheng

(College of Mechanical Engineering, Zhejiang University of Technology, Hangzhou 310032)

Abstract

A novel six-degree of freedom hybrid humanoid mechanical leg with partially decoupled parallel mechanism is proposed aiming at the complexity of motion analysis caused by the strong coupling of parallel mechanism. Firstly, the layout form of this hybrid mechanism is described according to the anatomical motion characteristics of human legs. Secondly, the application of the Paden-Kahan sub-problem in solving the inverse solution of the position of the lower-mobility parallel mechanism is extended combining the Paden-Kahan sub-problem with the spatial geometry method, and the inverse solution equation of the humanoid leg is obtained. The display equation of position forward solution is derived by algebraic method based on the set structure of humanoid leg. Thirdly, the kinematics transfer matrix of the hybrid leg is derived via the Klein form, a bilinear symmetric form of the Lie algebra $se(3)$. Finally, the accuracy of kinematics model of the hybrid leg based on screw theory is verified by a numerical example, which lays a theoretical foundation for the further study of the mechanism.

Key words: hybrid humanoid mechanical leg, partially decoupled, screw theory, Klein form, kinematics analysis