

基于区间 II 型 T-S 模糊模型的立方体机器人自平衡控制^①

李磊^{②*} 章政^{***} 黄卫华^{**} 郭庆瑞^{*} 胡阳城^{*}

(* 武汉科技大学机器人与智能系统研究院 武汉 430081)

(** 武汉科技大学冶金自动化与检测技术教育部工程研究中心 武汉 430081)

(*** 武汉科技大学信息科学与工程学院 武汉 430081)

摘要 立方体机器人具有非线性、多变量、强耦合和欠驱动结构不稳定等特性。针对坡面上以棱边为支点自平衡的立方体机器人的控制问题,设计了一种基于区间 II 型 T-S 模糊模型的立方体机器人自平衡控制系统。首先,基于区间 II 型 T-S 模糊模型对立方体机器人在坡面上以棱边为支点自平衡进行建模;然后,设计了基于区间 II 型 T-S 模糊模型的状态反馈控制器,并通过粗糙集对控制器的模糊规则进行约简;最后,实验验证了本文所设计立方体机器人坡面控制系统的可行性。通过实验结果对比可知,相比于传统比例积分微分(PID)控制系统,本文所设计的基于区间 II 型 T-S 模糊模型的控制系统的控制能更好地处理立方体机器人系统的不精确性和外界扰动。

关键词 立方体机器人; 区间 II 型 T-S 模糊模型; 粗糙集; 自平衡控制

0 引言

立方体机器人是一类具有立方体外壳、由内置的惯性轮或动力摆等力矩发生装置构成的新型机器人,通过质心偏移和动量守恒实现以立方体的顶点或者棱边为支点的自平衡或翻滚等。立方体机器人可作为机器人学和控制科学科研、教学的一种开放式智能机器人研究开发平台,还可应用于对青少年机器人技能拓展等科普领域;多个立方体机器人组装后可用于桥梁修补、太空探索等领域,具有重要的理论价值和广阔的发展前景。

目前,关于立方体机器人的研究主要集中在自平衡控制系统的设计。一般是利用拉格朗日方程、凯恩方程建立立方体机器人自平衡动力学模型,在此基础上基于比例积分微分(proportional integral derivative, PID)算法^[1-2]、线性二次型调节(linear quadratic regulator, LQR)算法^[3]以及状态反馈^[4]等

经典控制方法实现立方体机器人的控制系统设计。然而,立方体机器人等效为一个多自由度的倒立摆系统,具有非线性、多变量、强耦合和欠驱动结构不稳定等特性^[4-6],导致系统模型复杂且难以进行精确的数学描述。为了解决上述问题,文献[7]设计出一种基于 Sugeno 模糊推理型的智能积分模糊控制器对立方体系统进行控制。文献[8]将径向基函数(radial basis function, RBF)神经网络和遗传算法相结合的进化 RBF 神经网络控制方法对立方体系统进行控制。文献[9]对立方体机器人单点平衡设计自抗扰控制器,实现对多变量系统的解耦控制。上述研究主要是基于立方体机器人在平面上自平衡控制系统的设计,而关于其在坡面上自平衡稳定控制鲜有研究。

针对立方体机器人在坡面上自平衡控制的问题,本文以所设计的以棱边为支点的立方体机器人为研究对象,建立了基于区间 II 型 T-S 模糊模型的立方体机器人自平衡控制系统。首先,自主搭建了

^① 国家自然科学基金(61773298)和教育部工程研究中心开放基金(MADT201603)资助项目。

^② 男,1995年生,硕士生;研究方向:自平衡立方体机器人的建模与控制;联系人,E-mail:2543310540@qq.com。

(收稿日期:2021-08-16)

一种以棱边为支点的立方体机器人,基于区间 II 型 T-S 模糊模型对立方体机器人进行建模并分析了其非线性特征;然后,基于并行分布补偿原理,设计了一种基于区间 II 型 T-S 模糊模型的状态反馈控制器,并基于粗糙集对模糊规则进行约简;最后,在坡面上对自行搭建的立方体机器人控制系统进行仿真和实测验证。

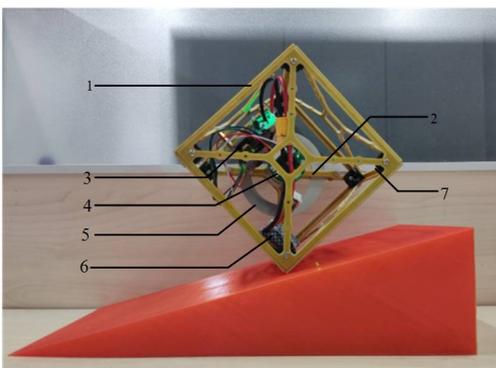
1 立方体机器人的机械结构设计

本文设计了一种外部尺寸为 $13.6 \text{ cm} \times 13.8 \text{ cm} \times 14 \text{ cm}$ 的立方体机器人,内部器件集成度高、无其他器件在立方体外部、独立性好,其实体结构如图 1 所示。立方体机器人主要由外壳、惯性轮、主控模块、电机驱动模块、带减震板的 IMU 捷联惯导测量单元(加速度计以及可实现六轴姿态检测的陀螺仪)等组成。考虑到立方体机器人的机械结构需要质量对称分布,即保证当机器人在任意方向发生偏移时,所需要的回复力尽可能相等,因此采用自带 AB 相编码器的永磁直流电机作为驱动电机,可有效避免安装外部编码器造成不对称问题。立方体机器人的主要参数如表 1 所示。

2 基于区间 II 型 T-S 模糊模型的坡面上立方体机器人的建模

2.1 坐标系的建立

选取水平面为 X 轴,沿立方体机器人平衡点垂



1. 环氧树脂外框; 2. 电机固定件; 3. 主控单元及驱动电路; 4. 电机法兰联轴器; 5. 惯性轮; 6. 锂电池供能单元; 7. 直角连接组件

图 1 立方体机器人结构图

表 1 立方体机器人的主要参数表

参数名称	参数符号	参数数值
立方体总质量	M	0.3342 kg
惯性轮质量	m	0.0936 kg
立方体重心与点 A 的距离	l_1	0.125 m
动量轮重心与点 A 的距离	l_2	0.098 m
坡面底点与点 A 的距离	l_3	0.156 m
机体转动惯量	I_1	$9.846 \times 10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$
惯性轮转动惯量	I_2	$6.598 \times 10^{-5} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$

直水平方向为 Z 轴,建立惯性坐标系 XOZ 。在坡度为 γ 的坡面上立方体机器人实现单边自平衡,其机械结构可简化为由外壳、惯性轮组成,坐标系定义如图 2 所示。图中,立方体机器人的重心为 G 、惯性轮的重心为 P 、惯性轮的质量为 m ;立方体机器人相对于 Z 轴的偏转角为 θ ,惯性轮 ω_1 的偏转角为 β ;点 A 与立方体机器人重心 G 的距离为 l_1 ,与惯性轮重心 P 的距离为 l_2 ,与坡面底点 B 的距离为 l_3 ;坡面的滑动摩擦力为 μ 。

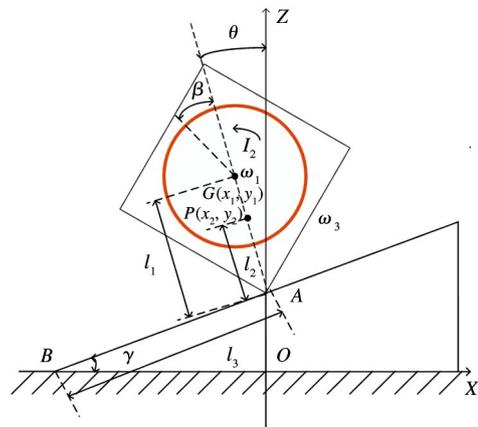


图 2 立方体机器人斜坡平衡坐标示意图

2.2 动力学建模与分析

以棱边为支点的立方体机器人可以等效为一个一阶倒立摆模型,为了简化控制器的设计,对立方体机器人的平衡条件作如下假设。

(1) 立方体机器人质量均匀可以等效为刚体。

(2) 仅考虑立方体机器人棱边与坡面的滑动摩擦力,忽略其他各种阻力。

对坡面上立方体机器人进行受力分析,可得:

$$(M + m)g \sin \gamma > \mu (M + m)g \cos \gamma \quad (1)$$

由此可得,滑动摩擦力 μ 与坡度 γ 之间满足:

$$\mu < \tan\gamma \quad (2)$$

立方体机器人在坡面上机体的动能为

$$T_1 = \frac{1}{2}Ml_1^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}I_1\dot{\theta}^2 \quad (3)$$

惯性轮的动能为

$$T_2 = \frac{1}{2}ml_2^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}I_2(\dot{\theta}^2 + \dot{\beta}^2) \quad (4)$$

根据拉格朗日算子可得,在坡面上自平衡立方体机器人的总动能为

$$T = T_1 + T_2 = \frac{1}{2}Ml_1^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}I_1\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}ml_2^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}I_2(\dot{\theta}^2 + \dot{\beta}^2) \quad (5)$$

立方体机器人在坡面上机体的势能为

$$V_1 = Mgl_1\cos\theta + Mgl_3\sin\gamma \quad (6)$$

惯性轮的势能为

$$V_2 = mgl_2\cos\theta + mgl_3\sin\gamma \quad (7)$$

由式(3)~(7)可得,立方体机器人在坡面上自平衡的拉格朗日算子为

$$L = \frac{1}{2}Ml_1^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}I_1\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}ml_2^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}I_2(\dot{\theta}^2 + \dot{\beta}^2) - (Ml_1 + ml_2)g\cos\theta - (M + m)gl_3\cos\gamma \quad (8)$$

立方体机器人在坡面上自平衡的广义力矩为

$$\mathbf{f} = [-I_2\ddot{\beta} \quad u - I_2\ddot{\theta}]^T \quad (9)$$

式中, u 为惯性轮的驱动力矩。

设立方体机器人的广义坐标分别为 θ 和 β , 将式(8)~(9)代入拉格朗日方程得:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = -I_2\ddot{\beta} \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\beta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \beta} = u - I_2\ddot{\theta} \end{cases} \quad (10)$$

计算并整理式(10)后,则有:

$$\begin{cases} \ddot{\theta} = \frac{(Ml_1 + ml_2)g\sin\theta}{Ml_1^2 + ml_2^2 + I_1} - \frac{u}{Ml_1^2 + ml_2^2 + I_1} \\ \ddot{\beta} = -\frac{(Ml_1 + ml_2)g\sin\theta}{Ml_1^2 + ml_2^2 + I_1} + \frac{(Ml_1^2 + ml_2^2 + I_1 + I_2)u}{I_2(Ml_1^2 + ml_2^2 + I_1)} \end{cases} \quad (11)$$

令 $\mathbf{x} = [x_1, x_2, x_3]^T = [\theta, \dot{\theta}, \dot{\beta}]^T$, 立方体机器

人可表示为

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}, u) = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x})u \quad (12)$$

其中, $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ 、 $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ 分别为

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{(Ml_1 + ml_2)g\sin x_1}{(Ml_1^2 + ml_2^2 + I_1)x_1} & 0 & 0 \\ -\frac{(Ml_1 + ml_2)g\sin x_1}{(Ml_1^2 + ml_2^2 + I_1)x_1} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{Ml_1^2 + ml_2^2 + I_1} \\ \frac{Ml_1^2 + ml_2^2 + I_1 + I_2}{I_2(Ml_1^2 + ml_2^2 + I_1)} \end{bmatrix} \quad (13)$$

由式(13)可知,立方体机器人输入量为 u , 立方体机器人的输出量为 θ 、 $\dot{\theta}$ 、 $\dot{\beta}$, 由此可知,式(13)所示的立方体机器人系统表现为欠驱动、非线性形式,常规的建模和控制方法难以奏效。

2.3 基于区间 II 型 T-S 模糊的立方体机器人建模

令 R_i^p 表示第 i 条模糊规则:

如果 x_1 is \tilde{F}_{i1} and x_2 is \tilde{F}_{i2} and x_3 is \tilde{F}_{i3} ,

则 $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}_i\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_i u(t)$ ($i = 1, 2, 3, \dots, l$)。

\tilde{F}_{i1} 、 \tilde{F}_{i2} 、 \tilde{F}_{i3} 分别为 II 型模糊子集, l 为模糊规则的个数。

当立方体机器人在平衡点附近时,有 $(x_0, u_0) = (0, 0)$, 则 $\mathbf{F}(\mathbf{x}_0, u_0) = \mathbf{F}(0, 0) = 0$ 。由此可得系统在平衡点 $(x_0, u_0) = (0, 0)$ 处的一个局部线性化模型为

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}_1\mathbf{x} + \mathbf{B}_1 u$$

当立方体机器人不在平衡点处,即 $(x_0, u_0) \neq (0, 0)$, 则在附近找到一个关于 x 和 u 的线性模型,使其在工作点 x_0 近似表示式(12),即找到相应的矩阵 \mathbf{A} 和 \mathbf{B} 。

根据立方体机器人的单边平衡过程分析可知,立方体机器人的角度及其角速度 θ 、 $\dot{\theta}$ 在平衡点附近小范围内波动,且变换范围很小;随着 θ 、 $\dot{\theta}$ 在平衡点附近变换时,动量轮角速度 $\dot{\beta}$ 提供相应的正向、反向力矩从而保证立方体机器人系统的动态平衡。

将 $\mathbf{x}(t) = [\theta, \dot{\theta}, \dot{\beta}]$ 模糊化为 $\mathbf{z} = [z_1, z_2, z_3]$, 选取 Gauss 型模糊隶属函数,设上、下隶属函数分别

为 $\bar{\mu}_{\tilde{F}_i}$ 、 $\underline{\mu}_{\tilde{F}_i}$, 设模糊子集的个数为 p 。由此可得第 i 条规则的区间模糊集合强度:

$$\tilde{\theta}_i(z(t)) : \begin{cases} \theta_i(z(t)) \equiv [\underline{\theta}_i(z(t)), \bar{\theta}_i(z(t))] \\ \underline{\theta}_i(z(t)) = \prod_{s=1}^p \underline{\mu}_{\tilde{F}_i^s}(z(t)) \\ \bar{\theta}_i(z(t)) = \prod_{s=1}^p \bar{\mu}_{\tilde{F}_i^s}(z(t)) \end{cases} \quad (14)$$

式(14)中的 Π 为乘法 t-norm 算子, 采用 Center-of-sets 降阶器对 $\dot{x}(t)$ 进行降阶融合计算:

$$Y_{\cos}(z(t)) = \bigcup_{\substack{\theta_i(z(t)) \in \tilde{\theta}_i(z(t)) \\ y^i \in Y^i}} \frac{\sum_{i=1}^l \theta_i(z(t)) y^i}{\sum_{i=1}^l \theta_i(z(t))} = [y_l, y_r] \quad (15)$$

其中,

$$\begin{aligned} y_l &= \min_{k \in [1, l-1]} \frac{\sum_{i=1}^k \bar{\theta}_i(z(t)) y^i + \sum_{i=k+1}^l \theta_i(z(t)) y^i}{\sum_{i=1}^k \bar{\theta}_i(z(t)) + \sum_{i=k+1}^l \theta_i(z(t))} \\ &\equiv \frac{\sum_{i=1}^L \bar{\theta}_i(z(t)) y^i + \sum_{i=L+1}^l \theta_i(z(t)) y^i}{\sum_{i=1}^L \bar{\theta}_i(z(t)) \bar{\theta}_i(z(t)) + \sum_{i=L+1}^l \theta_i(z(t))} \\ y_r &= \max_{k \in [1, l-1]} \frac{\sum_{i=1}^k \theta_i(z(t)) \bar{y}^i + \sum_{i=k+1}^l \bar{\theta}_i(z(t)) \bar{y}^i}{\sum_{i=1}^k \theta_i(z(t)) + \sum_{i=k+1}^l \bar{\theta}_i(z(t))} \\ &\equiv \frac{\sum_{i=1}^R \theta_i(z(t)) \bar{y}^i + \sum_{i=R+1}^l \bar{\theta}_i(z(t)) \bar{y}^i}{\sum_{i=1}^R \theta_i(z(t)) + \sum_{i=R+1}^l \bar{\theta}_i(z(t))} \end{aligned} \quad (16)$$

L 和 R 被称为转换点, 满足以下不等式:

$$\begin{aligned} \underline{y}^L &\leq y_l \leq \underline{y}^{L+1} \\ \bar{y}^R &\leq y_r \leq \bar{y}^{R+1} \end{aligned} \quad (17)$$

由 Kuhn-Munkers 算法降型得到:

$$y_i = \dot{x}_i = \frac{y_l + y_r}{2} \quad (18)$$

清晰化采用加权平均法, 则可得整个系统状态方程为

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^l h_i(z(t)) [A_i x(t) + B_i u(t)] \quad (19)$$

其中,

$$h_i(z(t)) = \frac{\mu_i(z(t))}{\sum_{i=1}^l \mu_i(z(t))} \quad (20)$$

$$\mu_i(z(t)) = \frac{1}{2} (\underline{\theta}_i(z(t)) + \bar{\theta}_i(z(t))) \quad (21)$$

3 基于区间 II 型 T-S 模糊模型的立方体机器人控制器设计

3.1 基于区间 II 型 T-S 模糊模型控制器设计

本文采用并行分配补偿法 (parallel distributed compensation, PDC) 确定区间 II 型 T-S 模糊模型的模糊控制器结构。区间 II 型模糊控制器的第 i 条模糊规则可以表示为

如果 z_1 is \tilde{F}_{i1} and z_2 is \tilde{F}_{i2} and z_3 is \tilde{F}_{i3} ,

$$\text{则 } u_i = -F_i z(t) \quad (22)$$

立方体机器人坡面单边自平衡整体控制律为

$$u = - \sum_{i=1}^l h_i(z(t)) F_i z(t) \quad (23)$$

3.2 稳定性证明

将式(23)带入式(12), 得到立方体机器人系统的全局状态方程为

$$\dot{x} = \sum_{i=0, j=0}^l h_i(z(t)) h_j(z(t)) (A_i - B_i F_j) z(t) \quad (24)$$

其中 A 、 B 分别为式(12)的系统矩阵和控制矩阵。

定理 1 对于一个式(24)所示的连续模糊模型, 在其平衡状态是全局渐进稳定的, 如果存在一个定常正定矩阵 P 以及一个正常数 σ , 使得下列矩阵不等式

$$\begin{aligned} A_{ii}^T P + P A_{ii} + \sigma P &< 0 \\ \left(\frac{A_{ij} + A_{ji}}{2} \right) P + P \left(\frac{A_{ij} + A_{ji}}{2} \right) + \sigma P &< 0 \quad i < j \quad \forall t \end{aligned} \quad (25)$$

成立, 则闭环模糊系统式(24)是全局渐进稳定的。

式中, $A_{ii} = A_i - B_i F_j$ 。

选取 Lyapunov 函数:

$$V(t) = z^T(t) P z(t) \quad (26)$$

则关于式(23)对于时间的求导为

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &= z^T(t)Pz(t) + z^T(t)Pz(t) \\ &= \sum_{i=1}^l h_i^2(z(t))z^T(t)[A_{ii}^T P + PA_{ii}]z(t) \\ &\quad + 2 \sum_{j=1}^l \sum_{i=1}^{j-1} h_i(z(t))h_j(z(t))z^T(t) \\ &\quad \left[\left(\frac{A_{ij} + A_{ji}}{2} \right) + P \left(\frac{A_{ij} + A_{ji}}{2} \right) \right] z(t) \quad (27) \end{aligned}$$

如果式(25)成立,则当 $z(t) \neq 0$ 时,有 $\dot{V}(z(t)) < 0$ 成立。则立方体机器人系统是全局渐进稳定的。

由定理 1 可以得到以下几点:

(1) $V(z(t)) \geq 0$, 且只有 $V(0) = 0$, 即为正定函数。

(2) 当 $\|z(t)\| \rightarrow \infty, V(z(t)) \rightarrow \infty$ 。

(3) $\forall z(t) \neq 0$, 有 $\dot{V}(z(t)) < 0$ 。

(4) $x_0 = [000]^T$ 是式(24)所示系统的一个平衡点。

根据以上分析可知,立方体机器人系统在平衡点 $x_0 = [0,0,0]^T$ 附近是渐近稳定的,在式(20)所示的控制输入 $u(t)$ 的作用下,立方体机器人系统收敛到平衡点,即

$$\lim_{t \rightarrow \infty} [\theta \quad \theta \quad \beta]^T = [0 \quad 0 \quad 0]^T$$

因此,立方体机器人系统的全局渐进稳定性问题转变成为求解 P 和 F_i 满足式(25)所示的不等式。

令 $X = P^{-1}$, 将式(25)两边同时乘 P^{-1} 可得:

$$\begin{aligned} XA_i^T + A_iX - XF_i^T B_i^T - B_i F_i X + \sigma X &< 0 \\ XA_i^T + A_iX + XA_j^T + A_jX - XF_j^T B_i^T - B_i F_j X &(28) \\ - XF_i^T B_j^T - B_j F_i X + 2\sigma X &< 0 \quad i < j \end{aligned}$$

令 $Y = F_i X$, 带入式(25)可得:

$$\begin{aligned} XA_i^T + A_iX - Y_i^T B_i^T - B_i Y_i + \sigma X &< 0 \\ XA_i^T + A_iX + XA_j^T + A_jX - XY_j^T B_i^T - B_i Y_j &(29) \\ - Y_i^T B_j^T - B_j Y_i + 2\sigma X &< 0 \quad i < j \end{aligned}$$

求满足式(29)不等式组的 X, Y_i 是一个关于线性矩阵不等式的凸优化可行性问题,可通过 Matlab 软件中的 LMI 工具箱进行求解,求解得到 X, Y_i 的值后,可通过反解得到 P 和 F_i 的值。

3.3 基于粗糙集的规则约简

立方体机器人是单输入三输出的复杂系统,模

糊控制器为三输入,模糊规则的数量为 p^3 , 模糊规则呈指数增长。采用粗糙集对控制器模糊规则进行约简,可以减少规则数目、优化控制器的结构。

将区间 II 型模糊控制器规则前件作为条件属性,后件作为决策属性,构成非空论域 U , 所有模糊规则构成本文约简的决策表,并将决策表的属性值用数字符号化,得到符号化的决策表。

对于非空论域 U, R 为论域上的等价关系,定义论域的上下近似,重要性分别为

X 的上近似:

$$\bar{R}(X) = \left\{ Y \in \frac{U}{R} : Y \cap X \neq \phi \right\} \quad (30)$$

X 的下近似:

$$\underline{R}(X) = \cup \left\{ Y \in \frac{U}{R} : Y \subseteq X \right\} \quad (31)$$

$$\gamma = \frac{\text{card}(\underline{R}(X))}{\text{card}(\bar{R}(X))} \quad (32)$$

$$\rho = 1 - \gamma \quad (33)$$

其中, card 表示集合元素个数, γ 为 X 的重要性, ρ 为粗糙度,当 $0 \leq \gamma \leq 1$ 时 X 为 U 上的粗糙集。

计算决策表的区分矩阵 M , 其任意元素为

$$\alpha(x, y) = \{ a \in A \mid f(x, a) \neq f(y, a) \} \quad (34)$$

建立区分函数表达式 Δ 为

$$\Delta = \prod_{(x,y) \in U \times U} \sum \alpha(x, y) \quad (35)$$

其中 $\sum \alpha(x, y) = a_1 \vee a_2 \vee \dots \vee a_k$ 区分函数中的每一项就对应一个属性约简结果,包含属性最少的合取项就是最小属性集 C' 。

经过粗糙集约简,冗余的规则被滤掉,得到约简后的 n 条规则。粗糙集规则约简后的立方体机器人区间 II 型模糊状态反馈控制器第 i 条决策规则为

$$\begin{aligned} R_c^i \text{ 如果 } z_1 \text{ is } \bar{F}_{i1} \text{ and } z_2 \text{ is } \bar{F}_{i2} \text{ and } z_3 \text{ is } \bar{F}_{i3} \\ \text{则 } u_i = -F_i z(t) \quad (i = 1, 2, \dots, n) \end{aligned} \quad (36)$$

粗糙集规则约简后的立方体机器人坡面单边自平衡的区间 II 型模糊状态反馈控制器为

$$u = - \sum_{i=1}^n h_i(z(t)) F_i z(t) \quad (37)$$

其中 $h_i(z(t))$ 与 $\mu_i(z(t))$ 分别为

$$h_i(z(t)) = \frac{\mu_i(z(t))}{\sum_{i=1}^n \mu_i(z(t))} \quad (38)$$

$$\mu_i(z(t)) = \frac{1}{2}(\underline{\theta}_i(z(t)) + \bar{\theta}_i(z(t))) \quad (39)$$

4 实验与结果分析

设立方体机器人初始状态 $x_0 = [\theta_0, \dot{\theta}_0, \dot{\beta}_0]^T = (5, 0, 0)$, 设 $\theta, \dot{\theta}, \dot{\beta}$ 的论域分别为 $\theta \in [-5, +5]$ 、 $\dot{\theta} \in [-20, +10]$ 、 $\dot{\beta} \in [-1500, +1500]$ 。将模糊控制器的输入量模糊化, 以 z_1 为例, 定义其模糊论域为 $[0, 1]$, 模糊子集为 $\{NB, NS, Z, PS, PB\}$, z_1 的隶属函数分布如图 3 所示。 z_2, z_3 的定义与 z_1 一致。

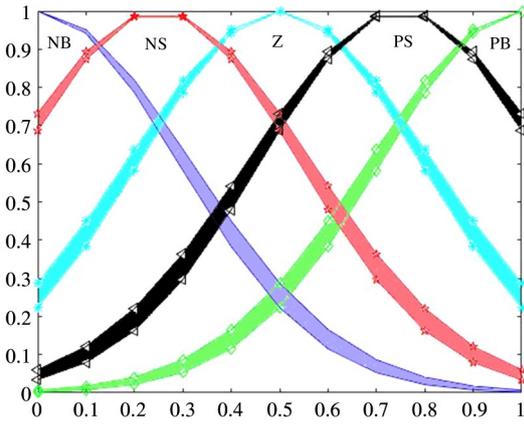


图 3 z_1 的隶属函数分布图

选取 Gauss 型模糊隶属函数, 上、下隶属函数分别为

$$\begin{aligned} \bar{\mu}_{\tilde{F}_1} &= \frac{1}{\exp(5x_i^2)}, \mu_{\tilde{F}_1} = \frac{1}{\exp(6x_i^2)}; \\ \bar{\mu}_{\tilde{F}_2} &= \frac{1}{\exp[5(x_i - 0.25)^2]}, \\ \mu_{\tilde{F}_2} &= \frac{1}{\exp[6(x_i - 0.25)^2]}; \\ \bar{\mu}_{\tilde{F}_3} &= \frac{1}{\exp[5(x_i - 0.5)^2]}, \\ \mu_{\tilde{F}_3} &= \frac{1}{\exp[6(x_i - 0.5)^2]}; \\ \bar{\mu}_{\tilde{F}_4} &= \frac{1}{\exp[5(x_i - 0.75)^2]}, \\ \mu_{\tilde{F}_4} &= \frac{1}{\exp[6(x_i - 0.75)^2]}; \\ \bar{\mu}_{\tilde{F}_5} &= \frac{1}{\exp[5(x_i - 1)^2]}, \mu_{\tilde{F}_5} = \frac{1}{\exp[6(x_i - 1)^2]} \end{aligned} \quad (40)$$

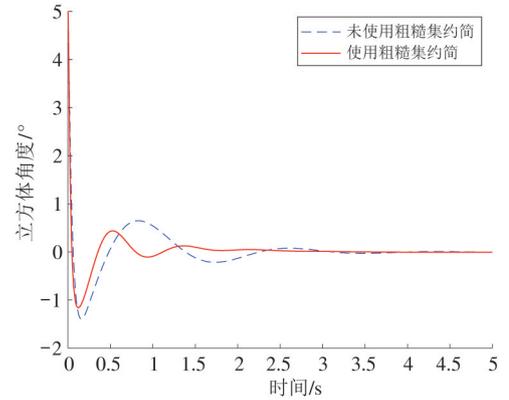
式(40)中 x_i 为隶属函数曲线变量。

经过粗糙集约简, 规则数目由原来的 125 条约简为 28 条。

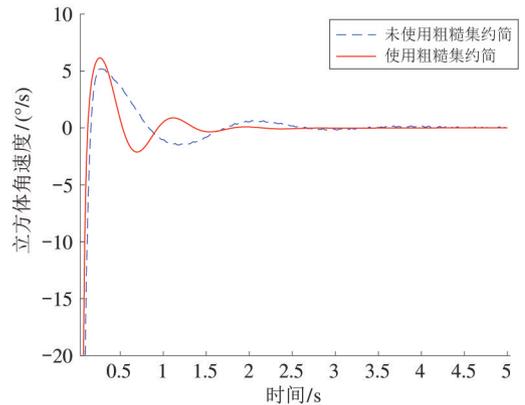
将立方体机器人静置于坡度为 15° 的坡面上, 分别进行自平衡、鲁棒性、抗干扰的仿真和实测实验。

4.1 立方体机器人坡面自平衡实验

经过粗糙集规则约简前后的立方体机器人输出曲线如图 4 所示。



(a) 立方体机器人角度曲线



(b) 立方体机器人角速度曲线

图 4 使用粗糙集约简前后的控制效果对比曲线

由表 2 和表 3 可知, 采用粗糙集对立方体机器人的 II 型模糊控制器进行规则约简后, 系统调节时间减少了 26%, 上升时间分别缩短了 26%、14%, 误差均方根分别减少 4%、18%。提高了控制器的快速性。

4.2 鲁棒性实验

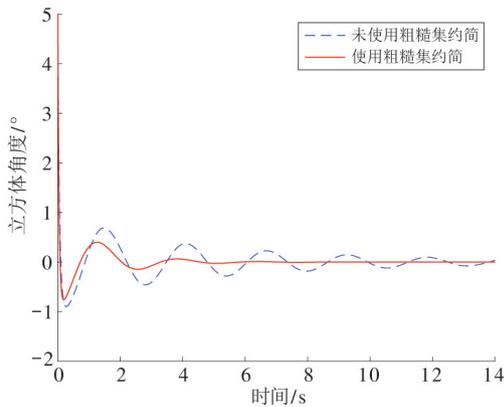
惯性轮重量增加 5%, 对比使用本文设计的模糊控制器与传统 PID 控制器, 实验结果如图 5 所示。

表2 立方体角度动态特性

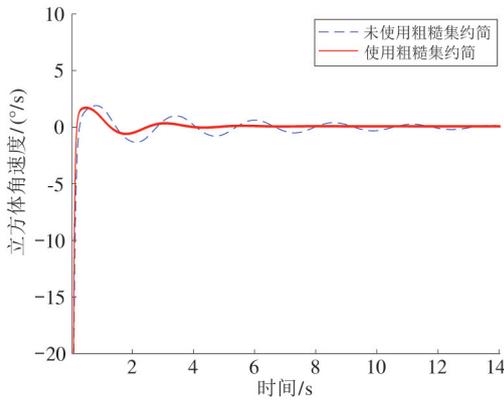
自平衡实验	上升时间	调节时间	超调量	均方根
规则约简	40.460 ms	2.6 s	4.737%	1.046
未规则约简	54.949 ms	3.5 s	5.970%	1.092

表3 立方体角速度动态特性

自平衡实验	上升时间	调节时间	超调量	均方根
规则约简	42.360 ms	2.6 s	0.510%	15.25
未规则约简	48.949 ms	3.5 s	0.526%	18.49



(a) 立方体机器人角度曲线



(b) 立方体机器人角速度曲线

图5 传统PID控制器与本文控制器控制效果对比曲线

由表4和表5可知,在惯性轮质量发生变化时,采用本文设计的模糊控制器,系统调节时间减少了57%,立方体角度与角速度超调量分别减37%、59%,上升时间分别缩短了13%、56%,误差均方根分别减少32%、2%。综上本文设计的模糊控制器具有更好自适应性,控制精度更高。

4.3 抗扰动实验

立方体机器人在坡面上达到自平衡稳态后,在

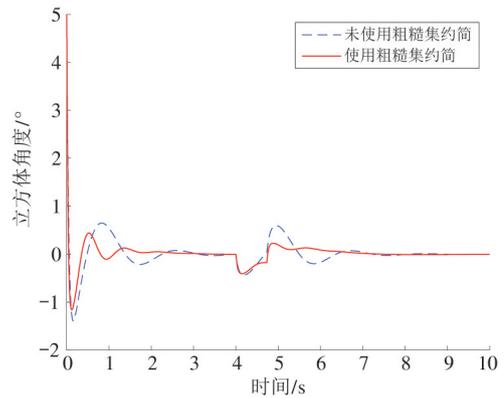
第4s时刻模拟惯性轮受到外界电磁干扰,加入锯齿波的扰动信号,分别采用传统PID控制器与本文的模糊控制器,得到图6所示的实验结果。

表4 立方体角度动态特性

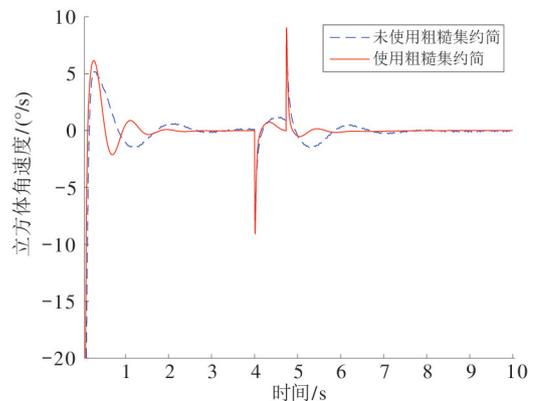
鲁棒性实验	上升时间	调节时间	超调量	均方根
本文控制器	80.137 ms	5 s	1.271%	0.2744
传统PID	90.091 ms	14 s	1.957%	0.3633

表5 立方体角速度动态特性

鲁棒性实验	上升时间	调节时间	超调量	均方根
本文控制器	55.533 ms	5 s	0.692%	3.2346
传统PID	126.282 ms	14 s	1.693%	4.7760



(a) 立方体机器人角度曲线



(b) 立方体机器人角速度曲线

图6 传统PID控制器与本文控制器控制效果对比曲线

由表6和表7可知,立方体机器人在第4s受到扰动后,采用本文设计的模糊控制器,系统调节时间缩短了50%,立方体角度与角速度超调量分别减27%、66%,误差均方根分别减少14%、3%。综上本文设计的模糊控制器具有更好的抗干扰能力,稳

定性更好、控制精度更高。

表 6 立方体角度动态特性

抗扰动实验	上升时间	受到扰动后 调节时间	超调量	均方差
本文控制器	32.867 ms	2 s	3.875%	0.3497
传统 PID	44.888 ms	4 s	5.280%	0.4056

表 7 立方体角速度动态特性

抗扰动实验	上升时间	受到扰动后 调节时间	超调量	均方差
本文控制器	85.919 ms	2 s	0.416%	7.048
传统 PID	87.493 ms	4 s	1.249%	7.269

4.4 实物运行实验

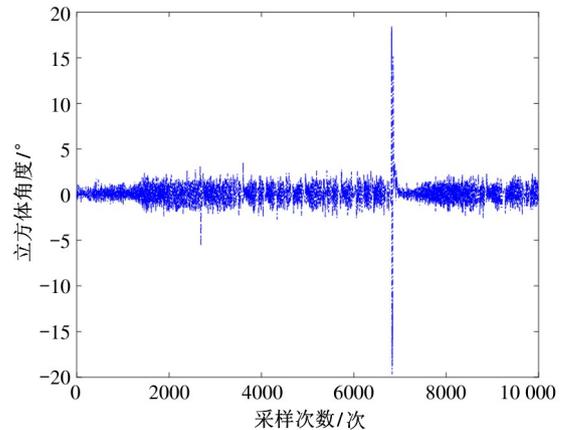
将本文所设计的模糊控制器应用于实际立方体机器人中,得到如图 7 所示的实物运行实测图。



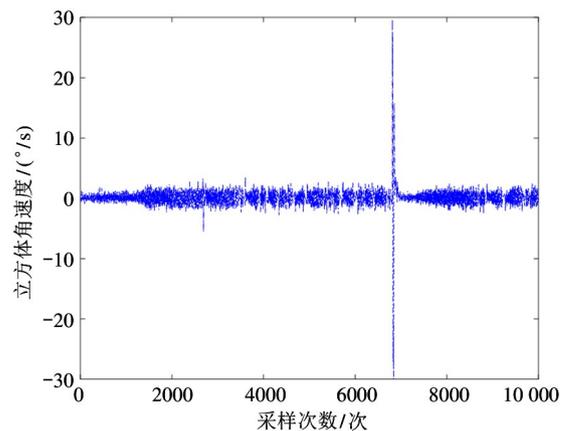
图 7 实物运行实测图

将本文设计的模糊控制器应用于立方体机器人的自平衡控制,得到了图 7 的效果。如图所示, $t = 2.5 \text{ s}$ 时立方体机器人达到稳定状态, $t = 4 \text{ s}$ 时加入扰动,立方体机器人偏离稳定位置 5° ; $t = 6 \text{ s}$ 时立方

体机器人偏离角度有所减小,恢复到 3° ; $t = 8 \text{ s}$ 时立方体机器人偏离稳定位置,并朝着对侧偏离 3° ; $t = 10 \text{ s}$ 时立方体机器人逐渐重回稳定位置; $t = 12 \text{ s}$ 时立方体机器人回到稳定位置。图 8 是立方体机器人的实测曲线。



(a) 立方体机器人角度实测曲线



(b) 立方体机器人角速度实测曲线

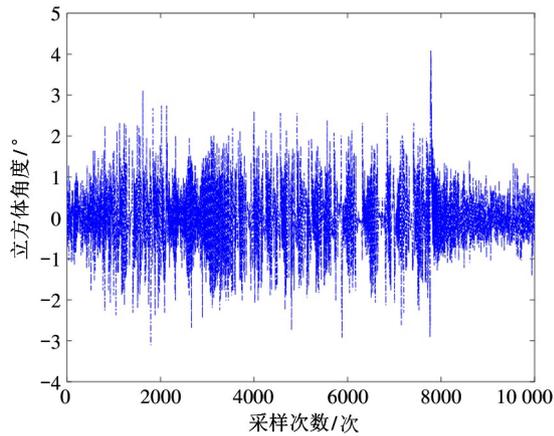
图 8 立方体机器人抗扰动实验实测曲线

立方体机器人的惯性轮质量增加 5%,系统的输出曲线如图 9 所示。

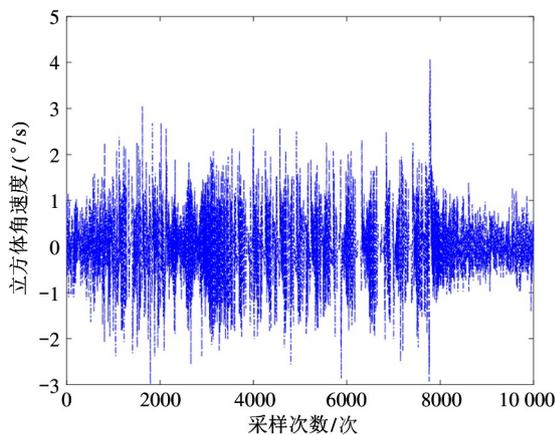
综上所述可知本文设计的基于区间 II 型 T-S 模糊模型的控制能更好地处理立方体机器人系统的不精确性和外界扰动。突出表现在反应速度快、可以实现高精度的非线性控制。

5 结论

针对坡面上以棱边为支点自平衡的立方体机器人控制问题,本文设计了一种基于区间 II 型 T-S 模糊模型的立方体机器人自平衡控制系统。首先,基



(a) 立方体机器人角度实测曲线



(b) 立方体机器人角速度实测曲线

图9 立方体机器人鲁棒性实验实测曲线

于区间 II 型 T-S 模糊模型对坡面上立方体机器人进行建模;然后,为了更好地处理立方体机器人系统的

不精确性和外界扰动,设计了基于区间 II 型 T-S 模糊状态反馈控制器。由于控制器规则的指数增长,采用粗糙集进行规则约简,减少了规则数量,优化了控制器结构;仿真及实测实验结果表明,本文所设计的基于区间 II 型模糊 T-S 模型的立方体机器人系统具有良好稳定性、抗干扰以及鲁棒性。

参考文献

[1] 陈志刚,阮晓钢,李元. 自平衡立方体机器人动力学建模[J]. 北京工业大学学报, 2018,44(3):376-381
 [2] 陈志刚,阮晓钢,李元. 以角为支点平衡的立方体机器人动力学建模[J]. 北京工业大学学报, 2019,45(7):638-645
 [3] GAJAMOHAN M, MUEHLEBACH M, WIDMER T, et al. The cubli: a reaction wheel based 3D inverted pendulum[C] // 2013 European Control Conference, Zurich, Switzerland, 2013:268-274
 [4] MUEHLEBACH M, D' ANDREA R. Nonlinear analysis and control of a reaction-wheel-based 3-D inverted pendulum[J]. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 2016, 25(1): 235-246
 [5] GAJAMOHAN M, MERZ M, THOMMEN I, et al. The cubli: a cube that can jump up and balance[C] // 2012 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems, Vilamoura-Algarve, Portugal, 2012: 3722-3727
 [6] MUEHLEBACH M, MOHANARAJAH G, D' ANDREA R. Nonlinear analysis and control of a reaction-wheel-based 3-D inverted pendulum[C] // IEEE Conference on Decision and Control, Firenze, Italy, 2013: 1283-1288
 [7] 田莉. 立方体系统的模糊控制算法研究[D]. 南京:南京理工大学自动化学院, 2006:18-30
 [8] 邱振彬. 基于观测器的立方体系统控制研究[D]. 南京:南京理工大学自动化学院, 2009:26-38
 [9] 陈志刚,阮晓钢,李元. 立方体机器人自抗扰平衡控制方法[J]. 控制与决策, 2019, 34(6):1203-1210

Self-balancing control of cubli robot based on interval II T-S fuzzy model

LI Lei*, ZHANG Zheng****, HUANG Weihua****, GUO Qingrui*, HU Yangcheng*

(* Institute of Robotics and Intelligent Systems, Wuhan University of Science and Technology, Wuhan 430081)

(** Engineering Research Center of Metallurgical Automation and Testing Technology, Ministry of Education, Wuhan University of Science and Technology, Wuhan 430081)

(*** School of Information Science and Engineering, Wuhan University of Science and Technology, Wuhan 430081)

Abstract

The cubli robot has the characteristics of nonlinearity, multi-variable, strong coupling and underactuated structure instability. Aiming at the control problem of the cubli robot with the edge as the fulcrum on the slope, a self-balancing control system of the cube robot based on the T-S fuzzy model of interval II is designed. Firstly, based on the interval II T-S fuzzy model, the self-balancing of the cubli robot on the slope with the edge as the fulcrum is modeled. Then, a state feedback controller based on the interval II T-S fuzzy model is designed, and the fuzzy rules of the controller are reduced by the rough set. Finally, the experiment verifies the feasibility of the slope control system of the cube robot designed in this paper. Through the comparison of the experimental results, it can be seen that the designed control system based on the interval II T-S fuzzy model can better deal with the inaccuracy and external disturbance of the cubli robot system compared with the traditional proportional integral derivative(PID) control system.

Key words: cubli robot, interval II T-S fuzzy model, rough set, self-balancing control