高技术通讯 2022 年 第32 卷 第11 期:1134-1142

doi:10.3772/j.issn.1002-0470.2022.11.004

死区非线性输入系统的自适应迭代学习控制①

陈建勇②

(浙江工业大学信息工程学院 杭州 310023)

摘 要 针对一类含有非对称死区输入和任意初态的非线性系统,本文提出了一种实现有限作业区间跟踪控制的神经网络迭代学习控制(ILC)算法。构造新的修正函数形式设计校正参考轨迹,放宽了迭代学习控制初值一致要求。利用径向基函数(RBF)神经网络估计和补偿系统的不确定性及死区参数,从而设计迭代学习控制器。引入一级数收敛序列用于处理重构误差对系统跟踪性能的影响,并给出了未知参数的微分-差分学习律。理论分析表明,该控制器能够实现系统状态在预指定作业区间上对参考轨迹的零误差跟踪。最后的仿真结果验证了所提控制算法的有效性。

关键词 迭代学习控制(ILC);非对称死区输入;非线性系统;神经网络;微分-差分学习律

0 引 言

迭代学习控制(iterative learning control,ILC)是处理非线性系统重复跟踪控制的有效方法。它利用跟踪误差调节被学习信号,从而不断修正控制输入,在有限作业区间上可以实现零误差跟踪性能。自适应控制主要用于处理非线性系统的参数不确定性[1-2],通过设计自适应律对未知常参数进行估计。随着自适应控制的深入研究,人们逐渐从自适应控制角度去设计学习控制,也利用学习控制来改善自适应过渡过程的动态品质。二者相互结合既能取长补短又能拓宽各自的应用范围,从而不断完善自适应迭代学习控制理论[3-4]。

常规迭代学习控制严格遵循初值一致性假设,即每次迭代时系统初值要等于参考轨迹初值。然而,在实际操作过程中,由于设备复位精度、外界干扰等因素的影响,系统运行时可能发生重置偏差。系统重复运行又会导致误差累加继而影响控制精度。因此,初值问题是迭代学习控制领域需处理的基本问题之一。目前,基于 Lyapunov 理论讨论初值问题的研究日益受到学者关注,并得到了一些解决方案。文献[5]提出时变边界层法,利用边界层的衰减特性,实现系统误差的渐进收敛。文献[6]考虑一类存在初态误差的纯反馈系统的跟踪控制问题,利用时变边界层构造误差函数解决了初值问题。文献[7]针对一阶参数化系统研究了 5 种初值假设下的输出跟踪情况。文献[8]利用变期望轨迹校正方法,即在初始时间段内根据系统状态初始点和期望轨迹切入点,设计一段过渡轨迹从而保证初态零误差。文献[9]提出一种误差跟踪设计方法,通过设计期望误差轨迹得到控制器,确保了跟踪误差轨迹在整个作业区间上与预定轨迹完全吻合。

死区非线性特性广泛存在于各类直流电机、伺服系统中,是影响系统控制性能的重要因素之一。对死区非线性的研究是控制理论研究的一项重要内容,为此人们提出了一些解决办法。文献[10]针对系统死区特性建立了死区模型,并利用自适应反演控制方法补偿死区。文献[11]对于一类非线性系

① 国家自然科学基金(6207391,61573320)资助项目。
② 男,1984 年生,博士生;研究方向:迭代学习控制;联系人,E-mail: wzchenjy@126.com。
(收稿日期:2021-04-23)

统建立了对称死区逆模型。文献[12]考虑了死区反函数法,用于补偿死区特性对系统带来的影响。文献[13]提出了未知非对称死区的补偿方法,但需要确定未知死区的界函数。文献[14]将死区转化为外界扰动的形式,但需要事先确定已知死区函数的断点和斜率。为了克服文献[14]的限制,文献[15]基于单个神经网络函数逼近器对死区近似估计进行有效补偿。

文献[6]利用时变边界层法处理了存在初态误差的一类非线性系统控制问题,但系统中没有考虑死区输入问题。文献[16]利用神经网络技术解决了非线性系统存在死区输入的学习控制问题,但没有涉及初值问题。借鉴文献[6]和文献[16]的结果,本文考虑存在初值问题以及死区输入问题的一类非线性系统,并提出基于径向基函数(radial basis function, RBF)神经网络的迭代学习控制算法。通过构造新的修正函数形式设计了校正参考轨迹,使得系统状态初值可任意选取;结合微分中值定理,将非对称死区转化为线性形式,利用 RBF 神经网络对不确定性和死区参数进行估计;给出了未知参数的微分-差分学习律。文中所提控制算法能实现系统状态在预指定作业区间上对参考轨迹的完全跟踪。

1 修正函数设计:一个说明性例子

先考虑一类重复运行的不确定系统,其表达式如下:

$$\begin{cases}\dot{x}_{i,k} = x_{i+1,k},\ i = 1,2,\cdots,n-1 \\ \dot{x}_{n,k} = \boldsymbol{\Theta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{x}_k) + bu_k(t) \\ y_k = x_{1,k}\end{cases} \tag{1}$$

其中,$k(k = 0,1,2,\cdots)$ 为迭代次数,$t \in [0,T]$ 表示运行时间,$T > 0$ 为迭代运行长度,$\boldsymbol{\Theta} \in \boldsymbol{R}^l$ 是未知参数向量,$\boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{x}_k) \in \boldsymbol{R}^l$ 是已知光滑函数向量,$\boldsymbol{x}_k = [x_{1,k}, x_{2,k},\cdots, x_{n,k}]^{\mathrm{T}} \in \boldsymbol{R}^n$ 为系统状态向量。控制增益 b 为未知常数,不失一般性,假定 b 的符号已知,不妨设 $b > 0$。$y_k \in R$ 代表系统控制输出,$u_k(t) \in R$ 代表系统控制输入。给定参考轨迹为 $x_{1r}(t)$,$t \in [0, T]$ 且存在 n 阶导数,记 $x_{ir} = x_{1r}^{(i-1)}(i = 1,2,\cdots,n)$,$x_{1r}^{(n)}$ 存在,令 $\boldsymbol{x}_r = [x_{1r}, x_{2r},\cdots, x_{nr}]^{\mathrm{T}}$。为了后续使用方便,记 $\boldsymbol{\phi}_k = \boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{x}_k)$, $u_k = u_k(t)$。

记 $\boldsymbol{z}_k = \boldsymbol{x}_k - \boldsymbol{x}_r = [z_{1,k}, z_{2,k},\cdots, z_{n,k}]^{\mathrm{T}}$。由于系统初值 $\boldsymbol{x}_k(0)$ 随迭代变化使得 $\boldsymbol{z}_k(0) \neq 0$,不满足迭代学习控制初态零误差要求,需要设计校正参考轨迹 $\boldsymbol{x}_{d,k} = [x_{1d,k}, x_{2d,k}, \cdots, x_{nd,k}]^{\mathrm{T}}$,即

$$\begin{aligned} &x_{1d,k}(t) = x_{1r}(t) + \sum_{i=1}^{n}\omega_i(t)z_{i,k}(0) \\ &z_{i,k}(0) = x_{i,k}(0) - x_{ir}(0) \\ &x_{id,k}(t) = x_{1d,k}^{(i-1)},\ i = 2,3,\cdots,n+1 \end{aligned} \tag{2}$$

式中,修正函数 $\omega_i(t) \in R\ (i = 1,2,\cdots,n)$ 需要满足如下条件:

(1) $\omega_i(t)$ 是 n 阶可导,并且导数有界;

(2) $\omega_i^{(i-1)}(0) = 1$, $\omega_i^{(i-1)}(T_1) = 0$;

(3) $\omega_i^{(j)}(0) = 0$, $\omega_i^{(j)}(T_1) = 0$;

$j = 0,1,2,\cdots,n-1$; $j \neq i-1$;

(4) $\omega_i^{(n)}(T_1) = 0$;

(5) $\omega_i^{(j)}(t) = 0$, $t \in [T_1, T]$ $(j = 0,1,\cdots,n)$。

当 $\omega_i(t)$ 满足上述 5 个条件时,可知当 $t \in [T_1, T]$ 时,$\boldsymbol{x}_{d,k}(t) = \boldsymbol{x}_r(t)$;当 $t = 0$ 时,有 $\boldsymbol{x}_{d,k}(0) = \boldsymbol{x}_k(0)$。

选取适合的修正函数 $\omega_i(t)$ 是设计校正参考轨迹 $\boldsymbol{x}_{d,k}$ 的关键[17]。研究者已经给出了多种修正函数的方法。文献[18]和[19]分别给出了设计一阶系统和二阶系统修正函数的方法及形式。文献[20]给出了如下高阶系统的修正函数设计形式:

$$\omega_i(t) = \begin{cases}\dfrac{t^{i-1}}{(i-1)!}\cos^{n+1}\left(\dfrac{\pi}{2}\sin^{n+1}\left(\dfrac{\pi t^2}{2T_1^2}\right)\right) & t \in [0, T_1) \\ 0 & t \in [T_1, T]\end{cases}$$

该修正函数形式较为复杂,并且在各阶求导计算时工作量较大。因此,本文将从多项式角度来设计高阶系统的修正函数,构造如下形式的 $\omega_i(t)$ 表达式:

$$\omega_i(t) = \begin{cases}\dfrac{t^{i-1}}{(i-1)!} + a_{i,1}t^n + a_{i,2}t^{n+1} + \cdots + a_{i,n}t^{2n} & t \in [0, T_1) \\ 0 & t \in [T_1, T]\end{cases} \tag{3}$$

由式(3)可知,本文设计的修正函数 $\omega_i(t)$ 形式

简单,求导计算方便,易于推广,且 $\omega_i^{(i-1)}(0)=1$, $\omega_i^{(j)}(0)=0$, $j=0,1,2,\cdots,n-1$; $j\neq i-1$。为了满足 $\omega_i(T_1)=0,\omega_i^{(j)}(T_1)=0$, $j=1,2,\cdots,n$,$\omega_i(t)$ 表达式中的系数可按如下方式选取:

$$[a_{i,1},\ a_{i,2},\cdots,\ a_{i,n+1}]^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{\Lambda}^{-1}\beta_i,\ i=1,2,\cdots,n \tag{4}$$

其中,

$$\boldsymbol{\Lambda}=\begin{bmatrix} T_1^n & T_1^{n+1} & \cdots & T_1^{2n} \\ nT_1^{n-1} & (n+1)T_1^n & \cdots & 2nT_1^{2n-1} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ n! & (n+1)!T_1 & \cdots & \dfrac{2n!}{n!}T_1^n \end{bmatrix}$$

$$\beta_1=[-1,\ 0,\ 0,\ \cdots,\ 0]^{\mathrm{T}}$$

$$\beta_2=[-T_1,\ -1,\ 0,\ \cdots,\ 0]^{\mathrm{T}}$$

$$\vdots$$

$$\beta_n=\left[-\frac{T_1^{n-1}}{(n-1)!},-\frac{T_1^{n-2}}{(n-2)!},\cdots-1,0\right]^{\mathrm{T}}$$

根据式(2),定义状态误差如下:

$$\boldsymbol{e}_k(t)=\boldsymbol{x}_k(t)-\boldsymbol{x}_{d,k}(t)=[e_{1,k},\ e_{2,k},\cdots,\ e_{n,k}]^{\mathrm{T}}$$

记滤波误差如下:

$$s_k=c_1e_{1,k}+c_2e_{2,k}+\cdots+c_{n-1}e_{n-1,k}+e_{n,k} \tag{5}$$

其中,正实数 $c_i(i=1,2,\cdots,n-1)$ 是 Hurwitz 多项式 $\boldsymbol{H}(\lambda)=\lambda^{n-1}+c_{n-1}\lambda^{n-2}+\cdots+c_1$ 的系数。令 $\boldsymbol{c}=[0,\ c_1,c_2,\cdots,c_{n-1}]^{\mathrm{T}}$,且满足范数 $\|\boldsymbol{c}\|\geqslant 1$。

为了叙述简便,文中将函数的时间自变量 t 略去。

对式(5)中的 s_k 求导,可得

$$\begin{aligned}\frac{1}{b}\dot{s}_k&=b^{-1}(\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{e}_k-\dot{e}_{n,k})\\&=b^{-1}(\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{e}_k-\dot{x}_{nd,k})+b^{-1}\boldsymbol{\Theta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\phi}_k+u_k\\&=\boldsymbol{\Theta}'^{\mathrm{T}}\phi'_k+u_k\end{aligned} \tag{6}$$

其中,$\boldsymbol{\Theta}'=[b^{-1},\ b^{-1}\boldsymbol{\Theta}]^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\phi}'_k=[\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{e}_k-\dot{x}_{nd,k},\ \boldsymbol{\phi}_k]^{\mathrm{T}}$。

设计控制律:

$$u_k=-\sigma s_k-\hat{\boldsymbol{\Theta}}'^{T}_k\phi'_k \tag{7}$$

其中,σ 为正常数,$\hat{\boldsymbol{\Theta}}'_k$ 为 $\boldsymbol{\Theta}'$ 的估计。

微分学习律:

$$\dot{\hat{\boldsymbol{\Theta}}}'_k=\boldsymbol{\Gamma}s_k\boldsymbol{\phi}'_k \tag{8}$$

其中,$\boldsymbol{\Gamma}$ 是对称正定矩阵,$\hat{\boldsymbol{\Theta}}'_0(0)=0$。

假设1 对 $\forall k$,有 $\hat{\boldsymbol{\Theta}}'_k(0)=\hat{\boldsymbol{\Theta}}'_{k-1}(T)$。

将控制律式(7)代入式(6),可得

$$\frac{1}{b}\dot{s}_k=-\sigma s_k+\tilde{\boldsymbol{\Theta}}'^{\mathrm{T}}_k\boldsymbol{\phi}'_k \tag{9}$$

其中,参数估计误差 $\tilde{\boldsymbol{\Theta}}'_k=\boldsymbol{\Theta}'-\hat{\boldsymbol{\Theta}}'_k$。

为了分析系统性能,选取正定函数:

$$V_k=\frac{1}{2b}s_k^2+\frac{1}{2}\tilde{\boldsymbol{\Theta}}'^{\mathrm{T}}_k\boldsymbol{\Gamma}^{-1}\tilde{\boldsymbol{\Theta}}'_k \tag{10}$$

对 V_k 求导,将微分学习律式(8)代入式(10),可得

$$\dot{V}_k=-\sigma s_k^2 \tag{11}$$

根据式(5),可知 $s_k^2(0)=0\leqslant s_k^2(T)$。由式(10)、(11),得

$$V_k(0,\hat{\boldsymbol{\Theta}}'_k(T))\leqslant V_{k-1}(0,\hat{\boldsymbol{\Theta}}'_{k-1}(T))-\int_0^T\sigma s_k^2\mathrm{d}\tau \tag{12}$$

取式(12)中的 $k=1,2,\cdots,N$ 并求和,得到

$$V_N(0,\hat{\boldsymbol{\Theta}}'_N(T))\leqslant V_0(0,\hat{\boldsymbol{\Theta}}'_0(T))-\sum_{k=1}^N\sigma\int_0^T s_k^2\mathrm{d}\tau$$

即

$$\sum_{k=1}^N\sigma\int_0^T s_k^2\mathrm{d}\tau\leqslant V_0(0,\hat{\boldsymbol{\Theta}}'_0(T))-V_N(0,\hat{\boldsymbol{\Theta}}'_N(T)) \tag{13}$$

由 $V_N(0,\hat{\boldsymbol{\Theta}}'_N(T))$ 的正定性以及 $V_0(0,\hat{\boldsymbol{\Theta}}'_0(T))$ 的定义,可知当 $k\to\infty$ 时,可使 s_k 以 L^2 范数形式收敛于0。

2 学习控制问题及算法提出

考虑一类存在初态误差且含有非对称死区输入系统的跟踪控制问题,其表达式如下:

$$\begin{cases}\dot{x}_{i,k}=x_{i+1,k},\ i=1,2,\cdots,n-1\\ \dot{x}_{n,k}=\boldsymbol{\Theta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{x}_k)+f(\boldsymbol{x}_k)+bv_k\\ y_k=x_{1,k}\\ v_k=D(u_k)\end{cases} \tag{14}$$

其中,$f(\boldsymbol{x}_k)\in R$ 为未知光滑有界非线性不确定函数,记 $f_k=f(\boldsymbol{x}_k)$。v_k 为控制器输出经非对称死区后作用于对象的控制量,$D(\cdot)$ 代表死区非线性,其形式如下:

$$D(u_k)=\begin{cases}m_r(u_k) & u_k\geqslant b_r\\ 0 & b_l<u_k<b_r\\ m_l(u_k) & u_k\leqslant b_l\end{cases}\tag{15}$$

其中, $m_r(b_r)=m_l(b_l)=0$。常数 $b_r>0$,$b_l<0$, $[b_l, b_r]$ 为未知死区宽度。$m_r(u_k)$ 和 $m_l(u_k)$ 为未知光滑非线性函数。由式(15)可知,当 $b_r=-b_l$,且 $m_r(u_k)$ 和 $m_l(u_k)$ 为线性函数时,式(15)可退化成对称线性死区。因此,系统中考虑非对称死区更具一般性,但也增加了控制器的设计难度。

对于不确定系统式(14),其控制目标是在任意初态情形下,通过构造修正函数获得校正参考轨迹,并设计迭代学习控制器 u_k。经充分迭代学习后,可实现系统状态在预指定作业区间上完全跟踪参考轨迹,并使系统滤波误差以 L^2 范数形式收敛于0。

对式(5)中的 s_k 求导,可得

$$\begin{aligned}\dot{s}_k&=\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{e}_k+\dot{e}_{n,k}\\&=\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{e}_k+\boldsymbol{\Theta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\phi}_k+f_k+bD(u_k)-\dot{x}_{nd,k}\end{aligned}\tag{16}$$

对死区非线性做如下假设。

假设2 记 $m_r(u_k)$ 和 $m_l(u_k)$ 的一阶导数分别为 $m'_r(u_k)$ 和 $m'_l(u_k)$,且符号已知,不失一般性,不妨设 $m'_r(u_k)>0$,$m'_l(u_k)>0$。

假设3 存在未知正常数 m_r^0、m_r^1、m_l^0 和 m_l^1 使得 $m'_r(u_k)$ 和 $m'_l(u_k)$ 满足如下条件:

$$\begin{aligned}&0<m_r^0\leqslant m'_r(u_k)\leqslant m_r^1,\ \forall u_k\geqslant b_r\\&0<m_l^0\leqslant m'_l(u_k)\leqslant m_l^1,\ \forall u_k\leqslant b_l\end{aligned}\tag{17}$$

由假设2和假设3可知,死区非线性具有动态、非平滑的特点,这为控制器的设计带来了不便。利用微分中值定理,式(15)描述的死区函数 $D(u_k)$ 重新表示如下:

$$D(u_k)=\rho_k u_k+d_k\tag{18}$$

这里,

$$\rho_k=\begin{cases}m'_r(\eta_r) & u_k\in[b_r,+\infty)\\ \dfrac{m'_r(\eta_r)+m'_l(\eta_l)}{2} & u_k\in(b_l,b_r)\\ m'_l(\eta_l) & u_k\in(-\infty,b_l]\end{cases}\tag{19}$$

且

$$d_k=\begin{cases}-m'_r(\eta_r)b_r & u_k\in[b_r,+\infty)\\ -\dfrac{m'_r(\eta_r)+m'_l(\eta_l)}{2}u_k & u_k\in(b_l,b_r)\\ -m'_l(\eta_l)b_l & u_k\in(-\infty,b_l]\end{cases}\tag{20}$$

当 $u_k\geqslant b_r$ 时,$\boldsymbol{\eta}_r\in(b_r,u_k)$;当 $u_k\leqslant b_l$ 时,$\boldsymbol{\eta}_l\in(u_k,b_l)$;当 $b_l<u_k<b_r$ 时,$\boldsymbol{\eta}_r\in(u_k,b_r)$,$\boldsymbol{\eta}_l\in(b_l,u_k)$。在满足假设2和假设3下,结合式(19)和式(20),则 ρ_k,d_k 有界且满足

$$\begin{aligned}&m_0\leqslant\rho_k\leqslant m_1\\&|d_k|\leqslant d_N\end{aligned}\tag{21}$$

其中,$m_0=\min\{m_l^0, m_r^0\}$,$m_1=\max\{m_l^1, m_r^1\}$,$d_N=\dfrac{m_r^1+m_l^1}{2}\max\{b_r,-b_l\}$。

将式(18)代入式(16),可得

$$\dot{s}_k=\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{e}_k+\boldsymbol{\Theta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\phi}_k+f_k+b(\rho_k u_k+d_k)-\dot{x}_{nd,k}\tag{22}$$

考虑正定函数:

$$\bar{V}_k=\frac{1}{2bm_0}s_k^2\tag{23}$$

对 $\bar{V}_k$ 求导,可得

$$\begin{aligned}\dot{\bar{V}}_k&=\frac{1}{m_0 b}s_k\dot{s}_k\\&=s_kH_k+\frac{1}{m_0}s_k(\rho_k u_k+d_k)\end{aligned}\tag{24}$$

其中,$H_k=(\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{e}_k+\boldsymbol{\Theta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\phi}_k+f_k-\dot{x}_{nd,k})/bm_0$。

利用RBF神经网络逼近不确定函数 H_k,可得

$$H_k=\boldsymbol{W}^{*\mathrm{T}}\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{X}_k)+\varepsilon_k\tag{25}$$

其中,$X_k=[\boldsymbol{e}_k,\boldsymbol{x}_k,\dot{\boldsymbol{x}}_{nd,k}]^{\mathrm{T}}\in\boldsymbol{R}^{2n+1}$ 为神经网络的输入向量。$\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{X}_k)=[\varphi_1(\boldsymbol{X}_k),\cdots,\varphi_l(\boldsymbol{X}_k)]^{\mathrm{T}}\in\boldsymbol{R}^l$ 为基函数向量,这里采用高斯函数,如下所示:

$$\varphi_i(\boldsymbol{X}_k)=e^{-\frac{(X_k-w_i)^{\mathrm{T}}(X_k-w_i)}{\mu_i^2}},\ i=1,\cdots,l$$

其中,$l(l>1)$ 为神经网络的节点数,w_i 表示中心点,μ_i 为宽度,记 $\boldsymbol{\varphi}_k=\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{X}_k)$。$\boldsymbol{W}^*\in\boldsymbol{R}^l$ 为理想权重矩阵。ε_k 为重构误差,且存在一个正常数 $\bar{\varepsilon}$,满足 $|\varepsilon_k|\leqslant\bar{\varepsilon}$。人们可以通过增加神经网络节点数来降低重构误差。

由于存在重构误差,为了防止系统发散及后续分析需要,文中引入一级数收敛数列。

定义 1　级数收敛序列 $\{\Delta_k\}$ 定义为[21]

$$\Delta_k = \frac{q}{k^m} \tag{26}$$

其中，常数 $k = 1, 2, \cdots$；给定常数 $q \geqslant 0 \in R$，$m \geqslant 2 \in N$。

对式(26)两边关于 k 求和并取极限，得到如下性质：

$$\sum_{k=1}^{\infty} \Delta_k \leqslant 2q \tag{27}$$

式(24)中利用 Young's 不等式，可得

$$\begin{aligned} s_k H_k &= s_k (\boldsymbol{W}^{*\mathrm{T}} \boldsymbol{\varphi}_k + \varepsilon_k) \\ &\leqslant \frac{1}{\Delta_k} s_k^2 \| W^* \|^2 \boldsymbol{\varphi}_k^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\varphi}_k + \frac{1}{4}\Delta_k + | s_k | \bar{\varepsilon} \\ &= \frac{1}{\Delta_k} s_k^2 \theta \boldsymbol{\varphi}_k^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\varphi}_k + \frac{1}{\Delta_k} s_k^2 + \frac{1}{4}\Delta_k (1 + \bar{\varepsilon}^2) \end{aligned} \tag{28}$$

其中，标量 $\theta = \| \boldsymbol{W}^* \|^2$。

将式(28)代入式(24)，可得

$$\begin{aligned} \dot{\bar{V}}_k &\leqslant \frac{1}{\Delta_k} s_k^2 \theta \boldsymbol{\varphi}_k^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\varphi}_k + \frac{1}{\Delta_k} s_k^2 + \frac{1}{4}\Delta_k (1 + \bar{\varepsilon}^2) \\ &\quad + \frac{1}{m_0} s_k (\rho_k u_k + d_k) \\ &\leqslant \frac{1}{\Delta_k} s_k^2 \theta \boldsymbol{\varphi}_k^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\varphi}_k + \frac{1}{m_0} s_k \rho_k u_k \\ &\quad + \frac{2}{\Delta_k} s_k^2 + \frac{1}{4}\Delta_k \left(1 + \bar{\varepsilon}^2 + \frac{d_N^2}{m_0^2}\right) \end{aligned} \tag{29}$$

选取 Lyapunov 函数：

$$V_k = \bar{V}_k + \frac{1-\delta}{2\beta} \tilde{\theta}_k^2 \tag{30}$$

其中，常数 $\delta \in [0, 1)$，常数 $\beta > 0$，$\tilde{\theta}_k = \hat{\theta}_k - \theta$。

选取控制律：

$$u_k = -\left(\sigma + \frac{2}{\Delta_k}\right) s_k - \frac{1}{\Delta_k} s_k \hat{\theta}_k \boldsymbol{\varphi}_k^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\varphi}_k \tag{31}$$

其中，σ 为正常数。

微分-差分学习律：

$$(1-\delta)\dot{\hat{\theta}}_k = -\delta \hat{\theta}_k + \delta \hat{\theta}_{k-1} + \frac{\beta}{\Delta_k} s_k^2 \boldsymbol{\varphi}_k^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\varphi}_k \tag{32}$$

对式(30)中的 V_k 求导，可得

$$\dot{V}_k \leqslant -\sigma s_k^2 - \tilde{\theta}_k^{\mathrm{T}} \beta^{-1} (\delta \hat{\theta}_k - \delta \hat{\theta}_{k-1}) + \bar{D}_k \tag{33}$$

其中，$\bar{D}_k = \frac{1}{4}\Delta_k \left(1 + \bar{\varepsilon}^2 + \frac{d_N^2}{m_0^2}\right)$。

假设 4　对 $\forall k$，有 $\hat{\theta}_k(0) = \hat{\theta}_{k-1}(T)$。

定理 1　非线性系统式(14)在任意初态下，满足假设 2 ~ 4，采用控制律式(31)以及微分-差分学习律式(32)，足够多次迭代后，可使 s_k 以 L^2 范数形式收敛于 0。

证明　定义 Lyapunov 泛函：

$$L_k = V_k + \frac{\delta}{2\beta} \int_0^t \tilde{\theta}_k^2 \mathrm{d}\tau \tag{34}$$

连续 2 次迭代的差分为

$$\begin{aligned} \Delta L_k(t) &= V_k(t) - V_{k-1}(t) + \frac{\delta}{2\beta} \int_0^t (\tilde{\theta}_k^2 - \tilde{\theta}_{k-1}^2) \mathrm{d}\tau \\ &\leqslant \int_0^t (-\sigma s_k^2 + \bar{D}_k) \mathrm{d}\tau + V_k(0) - V_{k-1}(t) \\ &\quad - \int_0^t \tilde{\theta}_k^{\mathrm{T}} \beta^{-1} (\delta \hat{\theta}_k - \delta \hat{\theta}_{k-1}) \mathrm{d}\tau \\ &\quad + \frac{\delta}{2\beta} \int_0^t (\tilde{\theta}_k^2 - \tilde{\theta}_{k-1}^2) \mathrm{d}\tau \end{aligned} \tag{35}$$

根据等式 $(b-a)(2a-2c) + (b-a)^2 - (b-c)^2 = -(c-a)^2$，则式(35)的后两项处理后，得到

$$\begin{aligned} &- \int_0^t \tilde{\theta}_k^{\mathrm{T}} \beta^{-1} (\delta \hat{\theta}_k - \delta \hat{\theta}_{k-1}) \mathrm{d}\tau + \frac{\delta}{2\beta} \int_0^t (\tilde{\theta}_k^2 - \tilde{\theta}_{k-1}^2) \mathrm{d}\tau \\ &= -\frac{\delta}{2\beta} \int_0^t (\hat{\theta}_k - \hat{\theta}_{k-1})^2 \mathrm{d}\tau \end{aligned}$$

则

$$\Delta L_k(t) \leqslant \int_0^t (-\sigma s_k^2 + \bar{D}_k) \mathrm{d}\tau + V_k(0) - V_{k-1}(t) \tag{36}$$

由于 $s_k(0) = 0$ 并结合假设 4，得到

$$\begin{aligned} V_k(0) &= \frac{1}{2bm_0} s_k^2(0) + \frac{1-\delta}{2\beta} \tilde{\theta}_k^2(0) \\ &\leqslant \frac{1}{2bm_0} s_{k-1}^2(T) + \frac{1-\delta}{2\beta} \tilde{\theta}_{k-1}^2(T) \\ &= V_{k-1}(T) \end{aligned} \tag{37}$$

因此，令 $t = T$，取式(36)中的 $k = 1, 2, \cdots, N$ 并求和，可得

$$\begin{aligned} L_N(T) &= L_0(T) + \sum_{k=1}^{N} \Delta L_k \\ &\leqslant L_0(T) + \sum_{k=1}^{N} \int_0^T (-\sigma s_k^2 + \bar{D}_k) \mathrm{d}\tau \\ &= L_0(T) + \frac{T}{4}\left(1 + \bar{\varepsilon}^2 + \frac{d_N^2}{m_0^2}\right) \sum_{k=1}^{N} \Delta_k \\ &\quad - \sum_{k=1}^{N} \sigma \int_0^T s_k^2 \mathrm{d}\tau \end{aligned} \tag{38}$$

记 $\bar{L}_0(T) = L_0(T) + \frac{T}{4}\left(1 + \bar{\varepsilon}^2 + \frac{d_N^2}{m_0^2}\right) \sum_{k=1}^{N} \Delta_k$，结合

$L_N(T)$ 非负性,式(38)变为

$$\sum_{k=1}^{N}\sigma\int_0^T s_k^2\mathrm{d}\tau \leqslant \bar{L}_0(T) - L_N(T) \leqslant \bar{L}_0(T) \quad (39)$$

由式(27)知

$$\lim_{k\to\infty}\bar{L}_0(T) \leqslant L_0(T) + \frac{qT}{2}\left(1 + \bar{\varepsilon}^2 + \frac{d_N^2}{m_0^2}\right)$$

若能证明 $L_0(T)$ 的有界性,则 $\bar{L}_0(T)$ 有界。结合式(39),当 $k\to\infty$ 时,可使 s_k 在整个作业区间上收敛于0。下面证明 $L_0(t)$ 在区间 $[0, T]$ 上的有界性。

对式(34)中 L_k 求导,可得

$$\dot{L}_k(t) \leqslant -\sigma s_k^2 + \bar{D}_k - \frac{\delta}{\beta}\tilde{\theta}_k^{\mathrm{T}}(\hat{\theta}_k - \hat{\theta}_{k-1}) + \frac{\delta}{2\beta}\tilde{\theta}_k^2(t) \quad (40)$$

由于 $\hat{\theta}_k - \hat{\theta}_{k-1} = \tilde{\theta}_k - \tilde{\theta}_{k-1}$,式(40)的后两项化简后,可得

$$-\frac{\delta}{\beta}\tilde{\theta}_k^{\mathrm{T}}(\hat{\theta}_k - \hat{\theta}_{k-1}) + \frac{\delta}{2\beta}\tilde{\theta}_k^2 \leqslant \frac{\delta}{2\beta}\tilde{\theta}_{k-1}^2 \quad (41)$$

进一步地,由式(40)得到

$$\dot{L}_k(t) \leqslant \bar{D}_k + \frac{\delta}{2\beta}\tilde{\theta}_{k-1}^2(t) \quad (42)$$

当 $k = 0$ 时,由于 $\hat{\theta}_{-1}(t) = 0$,则 $\tilde{\theta}_{-1}^2(t) = \theta^2$,且 $\bar{D}_0 = 0$,则

$$\dot{L}_0(t) \leqslant \bar{D} + \frac{\delta}{2\beta}\theta^2 < \infty, \text{得到}$$

$$L_0(T) \leqslant L_0(0) + T\frac{\delta}{2\beta}\theta^2 < \infty$$

因此,$L_0(t)$ 在区间 $[0, T]$ 上是有界的。由式(39)可知,经过充分迭代后,可使 s_k 以 L^2 范数形式收敛于0。

3 数值仿真

为了验证所提控制算法的有效性,考虑如下非对称死区输入二阶系统:

$$\begin{cases}\dot{x}_{1,k} = x_{2,k}\\ \dot{x}_{2,k} = \boldsymbol{\Theta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\phi}_k + f_k + bD(u_k)\end{cases} \quad (43)$$

其中,$\boldsymbol{\Theta} = [1, 1]^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\phi}_k = [0.01x_{1,k},\ 0.01x_{2,k}^2]^{\mathrm{T}}$, $f_k = x_{1,k}^2(1 + \cos x_{2,k})$。

给定非对称死区函数表达式为

$$D(u_k) = \begin{cases}(1.3 - 0.1\cos u_k)(u_k - 0.3) & u_k \geqslant 0.3\\ 0 & -0.1 < u_k < 0.3\\ (1.2 - 0.2\cos u_k)(u_k + 0.1) & u_k \leqslant -0.1\end{cases}$$

设定系统式(43)中各参数值如下:$T = 2, T_1 = 0.5, c_1 = 8, \sigma = 0.1, q = 90/3, m = 2, \beta = 1$。状态初值 $x_{1,k}(0) = 0.25 + 0.1\mathrm{rand}$, $x_{2,k}(0) = 0$, $b = 2$。

给定参考轨迹如下。

$$[x_{1r},\ x_{2r}]^{\mathrm{T}} = [0.45\cos(\pi t),\ -0.45\pi\sin(\pi t)]^{\mathrm{T}}$$

记滤波误差性能指标 $S_k = \max\limits_{t\in[0,T]}(\|s_k\|)$,状态误差性能指标 $J_{1,k} = \max\limits_{t\in[0,T]}(\|e_{1,k}\|)$, $J_{2,k} = \max\limits_{t\in[0,T]}(\|e_{2,k}\|)$。

采样间隔取为0.001 s,由于系统状态初值随迭代变化,需要设计校正参考轨迹 $\boldsymbol{x}_{d,k} = [x_{1d,k},\ x_{2d,k}]^{\mathrm{T}}$,具体表示为

$$\boldsymbol{x}_{d,k} = \begin{bmatrix}x_{1r}\\ x_{2r}\\ x_{3r}\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\omega_1(t) & \omega_2(t)\\ \dot{\omega}_1(t) & \dot{\omega}_2(t)\\ \ddot{\omega}_1(t) & \ddot{\omega}_2(t)\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x_{1,k}(0) - x_{1r}(0)\\ x_{2,k}(0) - x_{2r}(0)\end{bmatrix}$$

其中,$\omega_1(t)$ 和 $\omega_2(t)$ 的选取如下:

$$\omega_1(t) = \begin{cases}1 + a_{1,1}t^2 + a_{1,2}t^3 + a_{1,3}t^4 & t\in[0, T_1)\\ 0 & t\in[T_1, T]\end{cases}$$

$$\omega_2(t) = \begin{cases}t + a_{2,1}t^2 + a_{2,2}t^3 + a_{2,3}t^4 & t\in[0, T_1)\\ 0 & t\in[T_1, T]\end{cases}$$

其中,系数为

$$\begin{bmatrix}a_{1,1}\\ a_{1,2}\\ a_{1,3}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}T_1^2 & T_1^3 & T_1^4\\ 2T_1 & 3T_1^2 & 4T_1^3\\ 2 & 6T_1 & 12T_1^2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1\\ 0\\ 0\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}a_{2,1}\\ a_{2,2}\\ a_{2,3}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}T_1^2 & T_1^3 & T_1^4\\ 2T_1 & 3T_1^2 & 4T_1^3\\ 2 & 6T_1 & 12T_1^2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-T_1\\ -1\\ 0\end{bmatrix}$$

利用RBF神经网络,给定神经网络的输入参数向量 $\boldsymbol{X}_k = [e_{1,k},\ e_{2,k},\ x_{1,k},\ x_{2,k},\ \dot{x}_{3d,k}]^{\mathrm{T}}$。设定神经网络节点数 $l = 60$,高斯函数中心点均匀分布在 $-1\sim1$ 之间,高斯函数宽度为10,取 $\hat{\theta}_0(0) = 0$。当采用控制律式(31)以及微分-差分学习律式(32)时进行仿真,仿真结果如图1~图5所示。

从图1和图2可知,经多次迭代后状态 $x_{1,k}$ 和

$x_{2,k}$ 在时间区间［0.5，2］上完全跟踪上参考轨迹 x_{1r} 和 x_{2r}。图 3 和图 4 分别是 $J_{1,k}$、$J_{2,k}$ 和 S_k 随迭代次数变化的情况。图 5 是第 10 次迭代过程中的控制输入以及非对称死区作用后的控制量输出情形。

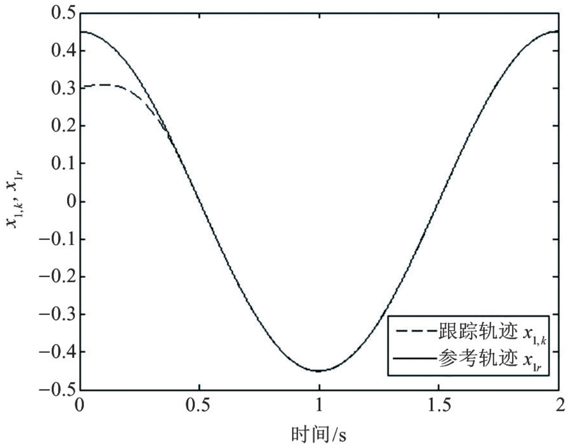

图 1　$x_{1,k}$ 及参考轨迹 x_{1r}（$k=10$）

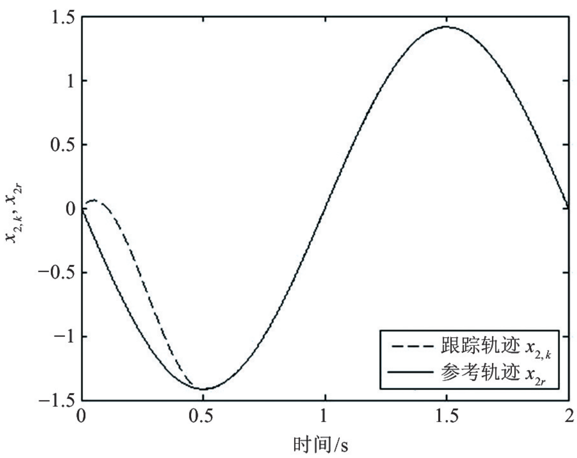

图 2　$x_{2,k}$ 及参考轨迹 x_{2r}（$k=10$）

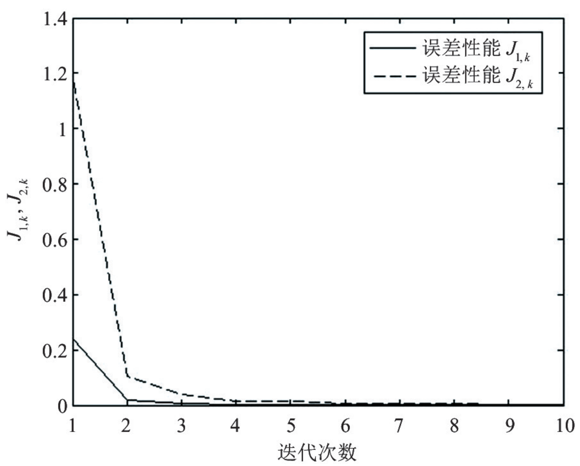

图 3　死区作用下状态误差性能指标 $J_{1,k}$，$J_{2,k}$

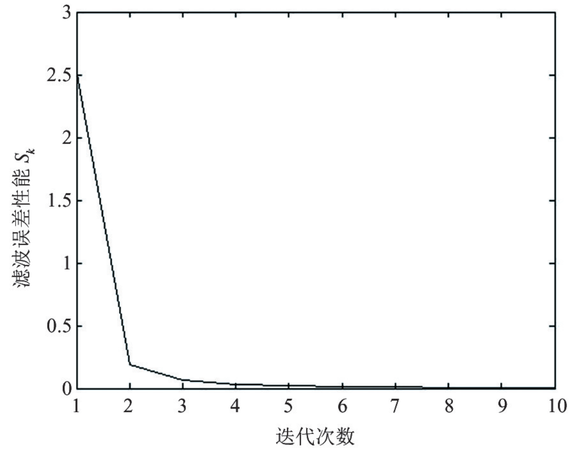

图 4　死区作用下滤波误差性能指标 S_k

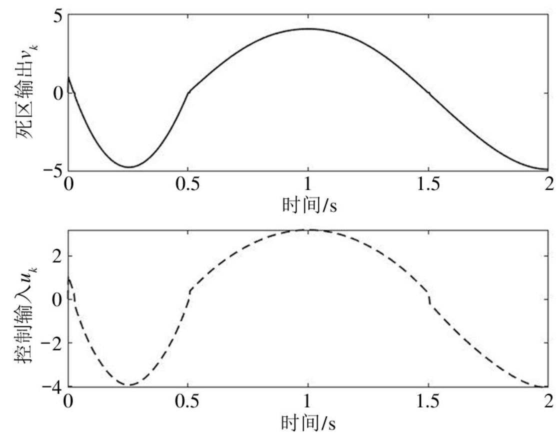

图 5　死区输出和控制输入

若系统式(14)中不存在不确定性和死区输入环节，则系统退化成系统式(1)的形式。采用控制律式(7)和微分学习律式(8)进行仿真，且参考轨迹、校正参考轨迹和各参数选取同前，另取 $\boldsymbol{\Gamma}=\mathrm{diag}\{1,1,1\}$。仿真结果如图 6 和 7 所示。

通过仿真实例，可以看出利用本文所提学习控制算法，系统可实现在预指定作业区间上对参考轨迹的完全跟踪。

4　结　论

本文讨论了一类含输入死区以及初值问题的非线性系统的跟踪控制问题。通过构造形式简单的新修正函数设计了校正参考轨迹，并利用 RBF 神经网络对不确定性和死区参数进行了估计，给出了微分-

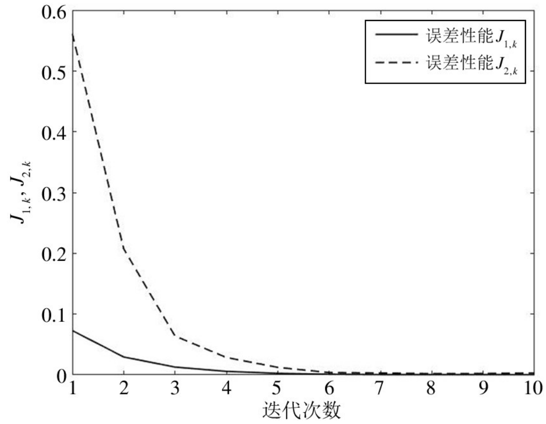

图 6　无死区作用下 $J_{1,k}$，$J_{2,k}$ 的收敛过程

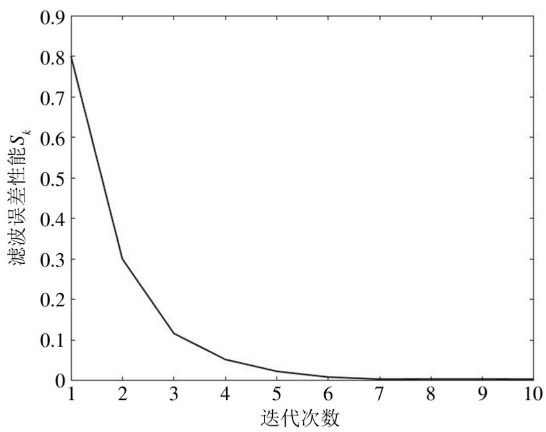

图 7　无死区作用下 S_k 的收敛过程

差分学习律。控制器设计过程中考虑了重构误差对系统跟踪性能的影响,为了防止系统发散引入了级数收敛序列,所设计的控制器实现了系统状态对参考轨迹在预指定作业区间上的完全跟踪。

参考文献

[1] KRISTIC M, KANELLAKOPOULOS I, KOKOTOVIC P. Nonlinear and Adaptive Control Design[M]. New York: Wiley, 1995: 10-21

[2] MARINO R. Nonlinear Control Design: Geometric, Adaptive, and Robust [M]. London: Prentice-Hall, 1995: 22-29

[3] CHEN Q, SHI H H, SUN M X. Echo state network-based backstepping adaptive iterative learning control for strict-feedback systems: an error-tracking approach[J]. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2020, 50(7): 3009-3022

[4] 孟玲聪, 刘福才, 赵文娜, 等. 考虑重力影响的柔性关节空间机械臂自适应迭代学习控制[J]. 高技术通讯, 2020, 30(10): 1078-1084

[5] CHIEN C, HSU C, YAO C. Fuzzy system-based adaptive iterative learning control for nonlinear plants with initial state errors[J]. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2004, 12(5): 724-732

[6] ZHANG C L, LI J M. Adaptive iterative learning control for nonlinear pure-feedback systems with initial state error based on fuzzy approximation[J]. *Journal of the Franklin Institute*, 2014, 351(3): 1483-1500

[7] XU J X, YAN R. On initial conditions in iterative learning control[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2005, 50(9): 1349-1354

[8] 李向阳. 一类非线性时变系统的迭代学习控制[J]. 控制理论与应用, 2014, 31(8): 1087-1093

[9] 孙明轩, 严求真. 迭代学习控制系统的误差跟踪设计方法. 自动化学报[J], 2013, 39(3): 251-262

[10] TAO G, KOKOTOVIC P. Adaptive control of plants with unknown dead-zones[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1994, 39(1): 59-68

[11] WANG X S, SU C Y, HONG H. Robust adaptive control of a class of nonlinear systems with unknown dead-zone [J]. *Automatica*, 2004, 40(3): 407-413

[12] QHO H, BAI E. Convergence results for an adaptive dead zone inverse[J]. *Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, 1998, 12(5): 451-466

[13] HUA C C, WANG Q G, GUAN X P. Adaptive tracking controller design of nonlinear systems with time delays and unknown dead-zone input[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2008, 53(7): 1753-1759

[14] WANG H, BING C, CHONG L. Direct adaptive neural tracking control for a class of stochastic pure-feedback nonlinear systems with unknown dead-zone[J]. *Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, 2013, 27(4): 302-322

[15] NI J, WU Z. Fixed-time adaptive neural network control for non-strict feedback nonlinear systems with dead-zone and output constraint[J]. *ISA Transactions*, 2020, 97: 458-473

[16] 朱胜, 孙明轩. 具有未知死区输入非线性系统的迭代学习控制[J]. 控制与决策, 2009, 24(1): 96-100

[17] 管海娃. 不确定系统学习控制方法研究[D]. 杭州:

浙江工业大学信息工程学院, 2020：25-26

［18］ LI X, CHOW T, CHENG L. Adaptive iterative learning control of non-linear MIMO continuous systems with iteration-varying initial error and reference trajectory［J］. *International Journal of Systems Science*, 2013, 44(4-6)：786-794

［19］ JIN X. Iterative learning control for non-repetitive trajectory tracking of robot manipulators with joint position constraints and actuator faults［J］. *Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, 2017, 31(6)：859-875

［20］ JIN X. Fault tolerant non-repetitive trajectory tracking for MIMO output constrained nonlinear systems using iterative learning control［J］. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2019, 49(8)：3180-3190

［21］ 朱胜, 孙明轩, 何熊熊. 严格反馈非线性时变系统的迭代学习控制［J］. 自动化学报, 2010,36(3)：454-458

Adaptive iterative learning control of nonlinear systems with input dead-zone

CHEN Jianyong

(College of Information Engineering, Zhejiang University of Technology, Hangzhou 310023)

Abstract

For a class of nonlinear systems in the presence of asymmetric dead-zone input and arbitrary initial state, a neural network iterative learning controller is presented to realize the tracking control of finite operation interval. A rectified desired trajectory is designed by constructing a new correction function, which relaxes the consistent initial value of iterative learning control. The radial basis function (RBF) neural network is used to estimate and compensate the system uncertainties and dead-zone parameters; thus, the iterative learning controller is obtained. A series convergence sequence is introduced to deal with the influence of reconstruction error and the differential-difference learning law of unknown parameters is given. Theoretical analysis shows that the controller can achieve perfect tracking of the desired trajectory on the specified interval. Finally, simulation results demonstrate the effectiveness of the learning control schemes.

Key words: iterative learning control (ILC), asymmetric dead-zone, nonlinear system, neural network, differential-difference learning law