

## 基于负定不变集的吸引域估计和动态输出反馈镇定<sup>①</sup>

朱龙飞<sup>②</sup> 陆超伦 李永强<sup>③</sup>

(浙江工业大学信息工程学院 杭州 310023)

**摘要** 针对于一般非线性离散时间系统,提出了一种动态输出反馈控制器的设计方法。首先给出了闭环吸引域(domain of attraction, DOA)估计和动态输出反馈镇定的充分条件。对于系统状态和控制器状态的给定李雅普诺夫函数,提出了输出反馈控制下的负定不变集,该负定不变集可以被视为非结构化的动态输出反馈控制器集合,且该负定不变集在状态空间中的投影可以被视为闭环 DOA 的估计。基于负定不变集,控制器的设计问题就转换为欧氏空间中的一组集合近似问题。使用数值集合近似方法,处理强非线性就不再是瓶颈。其次,基于区间分析提出了一种估计负定不变集的方法,来找到所需精度的集合的内部近似。

**关键词** 输出反馈;一般非线性系统;负定不变集;吸引域;区间分析

输出反馈控制器的设计是控制领域的重要分支之一,目前关于输出反馈控制器的大部分研究工作都是针对线性系统<sup>[1-3]</sup>或者关于控制输入的仿射非线性系统<sup>[4-7]</sup>,很少有针对一般非线性系统的。针对一般非线性系统的静态输出反馈控制器的设计,Xu 等人<sup>[8]</sup>从矢量控制的李雅普诺夫函数的角度提供了一种新的技术,并通过发展的比较原理建立了闭环吸引域(domain of attraction, DOA)的有效估计方法,据我们所知,关于一般非线性系统的动态输出反馈控制器设计还没有相关的研究成果发表。

对于一般的非线性系统,由于难以实现全局稳定,因此闭环系统的 DOA 需要广泛的研究。DOA 是一个用来描述平衡点附近渐进稳定区域的不变集,所有起始于该集合的状态轨迹都会收敛到这个平衡点<sup>[9]</sup>。DOA 在分析和综合中都起着重要的作用。在分析方面,已经有诸多研究工作来估算 DOA,包括最大李雅普诺夫函数法<sup>[10-11]</sup>、李雅普诺夫函数的组合法<sup>[12]</sup>、不变性原理方法<sup>[13]</sup>、轨迹逆转方法<sup>[14]</sup>和占有度量方法<sup>[15]</sup>等。在综合方面,一

些研究工作利用对闭环系统 DOA 的估计来进行控制器的设计。对于状态二次型和输入线性饱和系统,Valmorbidia 等人<sup>[16]</sup>通过求解基于线性矩阵不等式(linear matrix inequality, LMI)的优化问题,来计算反馈控制器的增益。对于具有仿射输入的多项式非线性系统,Chesi<sup>[17]</sup>通过求解广义特征值来估计 DOA,设计了一个多项式反馈控制器。对于有理多项式非线性系统,Vatani 和 HovD<sup>[18]</sup>提出了一个基于平方和规划的优化问题来估计闭环 DOA 和设计控制器。对于具有仿射输入的非线性系统,Saleme 和 Tibken<sup>[19]</sup>提出了一种基于多维网格的优化策略。Ding 等人<sup>[20]</sup>构建了一种二阶滑模控制算法。两者都对闭环 DOA 的估计进行了拓展。对于一般的非线性系统,Davo 等人<sup>[21]</sup>提出了一种结合 2 个输出反馈控制器的切换逻辑(一个使闭环系统局部稳定,另一个提供具有大 DOA 的最终有界性)。对于一般非线性离散时间系统,Li 和 Hou<sup>[22]</sup>提出了一种基于随机采样和集合网格技术来寻找稳定控制器集合方法。

① 国家自然科学基金(62073294)资助项目。

② 男,1998 年生,硕士生;研究方向:非线性控制;E-mail:2112103078@zjut.edu.cn。

③ 通信作者,E-mail:yqli@zjut.edu.cn。

(收稿日期:2024-03-11)

然而,这些关于 DOA 的综合问题的研究,除了文献[21]和[22]的工作之外,其余的仅考虑了特定的非线性系统,如多项式非线性系统、有理多项式非线性系统或者仿射非线性系统等,而没有涵盖一般的非线性系统。文献[21]的工作的缺点是需要 2 个预先设计的带有有界 DOA 的稳定控制器,但没有系统的方法来设计这些控制器。文献[22]的工作的缺点包括:(1)由于采用随机采样和集合网络技术来估计集合,因此没有关于集合估计误差的定量分析结果;(2)DOA 估计的不变性是由李雅普诺夫函数的水平集保证的,这通常会导致保守的估计。

本文针对一般非线性离散时间系统,基于负定不变集的方法,进行了闭环 DOA 的估计和动态输出反馈控制器的设计的相关工作。负定不变集可以拆分为 2 个部分:负定集和不变集。负定集的概念是文献[22]提出的。不变集的概念则是由 Blanchini<sup>[23]</sup>提出。在考虑静态状态反馈控制器设计时,状态-控制空间中的负定不变集可以被视为一个非结构化稳定化控制器集合。这里的“非结构化”意味着负定不变集是状态-控制空间中的一个子集,它不依赖于控制器的任何给定结构。基于负定不变集,控制器的设计问题被转化为欧几里得空间中的集合近似问题。通过使用数值集合近似方法,处理强非线性就不再是瓶颈。Li 等人<sup>[24]</sup>将这一思想扩展到了状态反馈鲁棒控制。

本文将负定不变集的思想扩展到了一般非线性离散时间系统动态输出反馈控制器的设计。首先,给出了闭环 DOA 估计和动态输出反馈稳定的充分条件。本文中  $z_+$ 、 $u$ 、 $z$ 、 $x$  和  $y$  分别代表下一个控制器状态、当前的控制输入、当前控制器状态、当前系统状态和当前系统输出。对于给定的李雅普诺夫函数  $L(z, x)$ , 求出在  $(z_+ - u - z - x)$  空间中的负定不变集,在  $(z_+ - u - z - x)$  空间中的负定不变集在  $(z - x)$  空间上的投影的任何子集都可以被视为闭环 DOA 的一个估计。若考虑可测量得到的是系统的输出而不是状态,系统的输出只包含系统的部分状态信息,即不同的状态可能导致相同的系统输出。对于  $(z_+ - u - z - x)$  空间中的负定不变集,通过将导致相同系统输出的所有状态的  $(z_+ - u)$  相交,就

可以得到  $(z_+ - u - z - y)$  空间中的负定不变集,该  $(z_+ - u - z - y)$  空间中的负定不变集就可以被视为一个非结构化的动态输出反馈控制器集合。其次,本文提出了一种基于区间分析的非结构化动态输出反馈控制器集合的估计方法,这是一种用于近似集合的有保证<sup>[25]</sup>的数值方法,有保证意味着可以获得感兴趣集的近似,这些近似可以尽可能精确。需要强调的是,本文考虑的是给定的李雅普诺夫函数,并解决了从中获得动态输出反馈稳定化和闭环 DOA 估计的问题,找到更好的李雅普诺夫函数的问题不在本文的范围内。

## 1 闭环 DOA 估计和输出反馈镇定的充分条件

考虑如下一般非线性离散时间系统。

$$x(k+1) = f(x(k), u(k)), y(k) = h(x(k)) \quad (1)$$

式中:  $x(k) \in \mathbb{R}^n$  表示状态,  $u(k) \in \mathbb{R}^m$  表示控制输入,  $y(k) \in \mathbb{R}^p$  表示输出。函数  $f: \mathbb{R}^{n+m} \rightarrow \mathbb{R}^n$  和  $h: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$  是连续函数,满足  $f(0, 0) = 0, h(0) = 0$ , 并且  $f$  和  $h$  关于原点的线性化系统是可测的。控制目标是寻找一个全阶动态输出反馈控制器。

$$\begin{pmatrix} z(k+1) \\ u(k) \end{pmatrix} = \xi(z(k), y(k)) = \begin{pmatrix} f_z(z(k), y(k)) \\ h_u(z(k), y(k)) \end{pmatrix} \quad (2)$$

式中:  $z(k) \in \mathbb{R}^n, \xi = (f_z, h_u): \mathbb{R}^{n+p} \rightarrow \mathbb{R}^{n+m}, f_z: \mathbb{R}^{n+p} \rightarrow \mathbb{R}^n, h_u: \mathbb{R}^{n+p} \rightarrow \mathbb{R}^m$  满足  $f_z(0, 0) = 0$  和  $h_u(0, 0) = 0$  的条件,从而得到以下闭环系统

$$\begin{aligned} z(k+1) &= f_z(z(k), h(x(k))) \\ x(k+1) &= f(x(k), h_u(z(k), h(x(k)))) \end{aligned} \quad (3)$$

对于 DOA 估计范围内的任意初始状态  $(z_0, x_0)$  在原点  $0 \in \mathbb{R}^{2n}$  都是渐进稳定的。

本节首先在负定集和不变集的研究基础上,结合两者概念,针对状态反馈控制下的负定不变集提出了一种求解该集合的映射方法;接着考虑输出反馈控制,又创新性地提出了输出反馈控制下的负定不变集;最后给出了输出反馈控制和闭环 DOA 估计

的充分条件。

### 1.1 状态反馈控制下的负定集

对于闭环系统式(3),省略时间标号  $k$ , 令  $x_+$ ,  $z_+$ ,  $u$ ,  $x$  分别表示  $x(k+1)$ ,  $z(k+1)$ ,  $u(k)$ ,  $z(k)$  和  $x(k)$ , 则该系统可以表示为  $(4n+m)$  维空间中的一个超曲面, 该超曲面的定义为

$$\Pi = \{(z_+; x_+; u; z; x) \in \mathbb{R}^{4n+m} \mid x_+ = f(x, u)\}$$

给定一个正定函数  $L: \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}_+$ , 满足以下条件:

$$L(z, x) > 0, \forall (z, x) \in \mathbb{R}^{2n} / \{0, 0\}, L(0, 0) = 0$$

那么可以定义  $\Pi$  的一个子集  $\Pi_N$ , 定义如下

$$\Pi_N = \{(z_+; x_+; u; z; x) \in \mathbb{R}^{4n+m} \mid L(z_+, x_+) - L(z, x) < 0, x_+ = f(x, u)\}.$$

将  $\Pi_N$  沿着  $x_+$  方向投影到  $(z_+ - u - z - x)$  空间, 可以得到状态反馈下  $(z_+ - u - z - x)$  空间中负定集  $\Phi_N \in \mathbb{R}^{3n+m}$ , 其定义如定义1所示。

**定义1** 对于闭环系统(3)以及一个正定函数  $L: \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}_+$ , 其在  $(z_+ - u - z - x)$  空间中的负定集的定义为

$$\Phi_N = \{(z_+; u; z; x) \in \mathbb{R}^{3n+m} \mid L(z_+, f(x, u)) - L(z, x) < 0\} \quad (4)$$

由上述定义可知, 负定集  $\Phi_N$  的边界不属于该集合本身, 即

$$\{(z_+; u; z; x) \in \mathbb{R}^{3n+m} \mid L(z_+, f(x, u)) - L(z, x) = 0\} \not\subset \Phi_N$$

故  $(z_+ - u - z - x)$  空间中的负定集  $\Phi_N$  是一个开集。显然, 原点  $(0; 0; 0; 0) \in \mathbb{R}^{3n+m}$  属于  $\Phi_N$  的边界, 但由于函数  $f$  和  $L$  的连续性, 存在原点邻域的一个子集包含在  $\Phi_N$  中。

### 1.2 状态反馈控制下的不变集

对于一个自治系统  $f_a: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , 如果对于任意的  $x \in X_I$ , 都有  $f_a(x) \in X_I$ , 则称集合  $X_I \subset \mathbb{R}^n$  为不变集<sup>[23]</sup>。对于系统式(1), 如果对于任意的  $x \in X_I$ , 都存在一个控制输入  $u \in \mathbb{R}^m$ , 使得  $f(x, u) \in X_I$ , 则称该集合为控制不变集<sup>[23]</sup>。在文献[23, 26, 27]中, 不变集和控制不变集都是在状态空间中定义的并进行了深入研究。本文中, 为了设计控制器, 先将不变集定义在状态-控制空间中, 如定义2所示。

**定义2** 集合  $\Phi_I \subset \mathbb{R}^{3n+m}$  若满足以下条件, 则

该集合对于系统式(3)来说是不变集。

$$\Phi_I = \{(z_+; u; z; x) \in \mathbb{R}^{3n+m} \mid (z_+; f(x, u)) \in \text{proj}_{zx}(\Phi_I)\} \quad (5)$$

式中:  $\text{proj}_{zx}(\Phi_I) \subset \mathbb{R}^{2n}$  表示  $\Phi_I$  沿着  $(z_+ - u)$  空间向  $(z - x)$  空间的投影。

为了在状态-控制空间中找到感兴趣区域的不变子集  $\Phi_I$ , 定义一个新的映射, 作用在集合  $\Phi \subset \mathbb{R}^{3n+m}$  上, 具体定义如定义3。

**定义3** 对于  $\Phi \subset \mathbb{R}^{3n+m}$ , 映射  $J$  定义如式(16)。

$$J(\Phi) = \{(z_+; u; z; x) \in \Phi \mid (z_+; f(x, u)) \in \text{proj}_{zx}(\Phi)\} \quad (6)$$

**注1** 映射  $J$  类似于文献[26]中定义的映射  $C$ , 映射  $C$  为带有干扰的系统定义的对于  $\Phi \subset \mathbb{R}^{3n+m}$ , 其非干扰版本是:

$$C(\text{proj}_{zx}(\Phi)) = \{(z_+; u; z; x) \in \Phi \mid (z_+; f(x, u)) \in \text{proj}_{zx}(\Phi)\} \quad (7)$$

从式(6)和(7)可以看出, 映射  $J$  和映射  $C$  的基本原理是相同的。惟一的区别在于, 映射  $J$  是将状态-控制空间中的子集映射到状态-控制空间中的子集, 而映射  $C$  是将状态空间中的子集映射到状态-控制空间中的子集。

将映射  $J$  连续作用  $i$  次得到的组合表示为  $J^i$ 。映射  $J$  具有下述性质。

**定理1** 对于任何紧集  $\Phi \subset \mathbb{R}^{3n+m}$ , 集合极限  $J^\infty(\Phi) = \lim_{i \rightarrow \infty} J^i(\Phi) = \bigcap_{i=1}^\infty J^i(\Phi)$  存在且对于系统(3)是不变集。

**证明** 从映射  $J$  的定义可知:

$$J^{i+1}(\Phi) = \{(z_+; u; z; x) \in J^i(\Phi) \mid (z_+; f(x, u)) \in \text{proj}_{zx}(J^i(\Phi))\} \quad (8)$$

根据式(8)可知,  $\{J^i(\Phi)\}$  是一个递减的集合序列, 即对于所有的  $i \geq 1$ , 都有  $J^{i+1}(\Phi) \subset J^i(\Phi)$ 。此外, 对于所有的  $i \geq 1$ ,  $J^i(\Phi)$  是一个紧集。因此  $J^i(\Phi)$  的集合极限存在(参见文献[28])。

同样, 根据式(8)可知:

$$\forall (z_+; u; z; x) \in J^{i+1}(\Phi), (z_+; f(x, u)) \in$$

$$proj_{zx}(J^i(\Phi))$$

当  $i$  趋向于无穷时, 由于  $J^i(\Phi)$  集合极限存在, 则有

$$\forall (z_+; u; z; x) \in J^\infty(\Phi), (z_+; f(x, u)) \in proj_{zx}(J^\infty(\Phi))$$

这意味着集合  $J^\infty(\Phi)$  满足定义2。因此,  $J^\infty(\Phi)$  对于系统式(3)来说是不变集。

根据定理1可以知道, 如果映射  $J$  被应用于状态-控制空间的任何初始紧子集  $\Phi$  无限次, 那么可以得到  $\Phi$  的一个不变子集  $\Phi_I$ 。因此, 可以使用映射  $J$  来找到在定义1中定义的负定集  $\Phi_N$  的不变子集。

### 1.3 状态反馈控制下的负定不变集

由定理1可知, 在状态-控制空间中, 可以使用映射  $J$  找到紧集的不变子集。由于定义1中的负定集  $\Phi_N$  是无界且开放的, 也就说  $\Phi_N$  不是紧集。为了确保  $\Phi_N$  的有界性, 引入假设1。

**假设1** 状态和控制输入满足一组混合约束

$$(z_+; u; z; x) \in \Phi_{cons} \subset \mathbb{R}^{3n+m}$$

式中:  $\Phi_{cons}$  是一个紧集。

引入假设1是不失一般性的, 是因为这些约束通常是由实际情况中的物理限制或者安全考虑引起的。在假设1的前提下, 可以得出  $\Phi_N \subset \Phi_{cons}$ , 因此  $\Phi_N$  是有界的。 $\Phi_N$  的开放性是由于它的边界  $\{(z_+; u; z; x) \mid L(z_+, f(x, u)) - L(z, x) = 0\}$  不是它的子集, 因此修改式(4)为式(9)。

$$\Phi_N = \{(z_+; u; z; x) \in \mathbb{R}^{3n+m} \mid L(z_+, f(x, u)) - L(z, x) < -\alpha\} \quad (9)$$

式中:  $\alpha \in \mathbb{R}_+$  是一个很小的正常数。因此在假设1的前提下, 式(9)中定义的  $\Phi_N$  是紧集, 可以得出以下定理2。

**定理2** 在假设1的基础上, 状态-控制空间中定义子集  $\Phi_{N\&I}$  如式(10)所示。

$$\Phi_{N\&I} = J^\infty(\Phi_N) \quad (10)$$

对于系统式(3)来说,  $\Phi_{N\&I}$  是一个负定不变集, 其中负定集合  $\Phi_N$  是在式(9)中定义的。

**证明** 在假设1的前提下, 式(9)中定义的负定集  $\Phi_N$  是一个紧集。根据定理1, 可以得出  $J^\infty(\Phi_N) = \lim_{i \rightarrow \infty} (J^i(\Phi_N))$  是存在的且对于系统式(3)来说是

不变集。根据映射  $J$  的定义, 可以知道:

$$J^\infty(\Phi_N) \subseteq \dots \subseteq J^2(\Phi_N) \subseteq J(\Phi_N) \subseteq \Phi_N$$

上述关系意味着  $\Phi_{N\&I}$  是  $\Phi_N$  的一个子集。因此, 对于系统式(3)来说,  $\Phi_{N\&I}$  是负定集。

综上, 对于系统式(3),  $\Phi_{N\&I}$  是负定不变集。

### 1.4 输出反馈控制下的负定不变集

在本文解决的问题中, 系统式(1)的输出可测而不是状态可测。输出仅包含状态的部分信息, 也就是说不同的状态可能有相同的系统输出。例如在一个倒立摆例子中, 以小车的位移和速度作为状态变量。但若只有位置传感器而无速度传感器, 则只能以位移作为系统输出, 此时输出仅包含状态的部分信息。对于给定的输出  $y$ , 定义一个状态子集  $X_y(y) \subset \mathbb{R}^n$ , 其中包含所有满足  $y = h(x)$  的状态  $x$ 。

$$X_y(y) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid y = h(x)\} \quad (11)$$

根据  $X_y(y)$ , 可以将  $\Phi_{N\&I}$  从  $(z_+ - u - z - x)$  空间映射到  $(z_+ - u - z - y)$  空间, 即用输出  $y$  替换状态  $x$ , 可以保证映射后的集合仍然是负定不变集。定义集合  $\Theta_{N\&I} \subset \mathbb{R}^{2n+m+p}$  如式(12)所示。

$$\Theta_{N\&I} = \{(z_+; u; z; y) \in \mathbb{R}^{2n+m+p} \mid \forall x \in X_y(y) \cap X_z(z), (z_+; u; z; x) \in \Phi_{N\&I}\} \quad (12)$$

则集合  $\Theta_{N\&I}$  是输出-控制空间中的负定不变集。

对于给定的  $z \in \mathbb{R}^n$ , 集合  $X_z(z) \subset \mathbb{R}^n$  的定义为

$$X_z(z) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid (z; x) \in proj_{zx}(\Phi_{N\&I})\} \quad (13)$$

从式(12)中可以知道, 任意的点  $(z_+; u; z; y) \in \Theta_{N\&I}$  都能保证对于任意的  $x \in X_y(y) \cap X_z(z)$ , 满足  $(z_+; u; z; x) \in \Phi_{N\&I}$ , 而不仅仅是对于  $x \in X_y(y)$ 。原因是如果  $x \notin X_z(z)$ , 那么就不存在  $(z_+; u)$  使得  $(z_+; u; z; x) \in \Phi_{N\&I}$ 。另外需要注意的是原点  $(0; 0; 0; 0) \in \mathbb{R}^{3n+m}$  不包含在  $\Phi_{N\&I}$  之中, 那么原点  $(0; 0; 0; 0) \in \mathbb{R}^{2n+m+p}$  也不包含在  $\Theta_{N\&I}$  之中。

令  $proj_{zy}(\Theta_{N\&I}) \subset \mathbb{R}^{n+p}$  表示  $\Theta_{N\&I}$  沿着  $(z_+ - u)$  空间向  $(z - y)$  空间的投影。根据式(12)可以得到

$$\forall (z; y) \in proj_{zy}(\Theta_{N\&I}), \exists (z_+; u) \in \mathbb{R}^{n+m}$$

满足

$$\forall x \in X_y(y) \cap X_z(z), (z_+; u; z; x) \in \Phi_{N\&I}$$

对于任意的  $(z; y) \in proj_{zy}(\Theta_{N\&I})$ , 可以定义

$(z_+ - u)$  空间中的非空集合  $\Xi_{N\&I}(z, y)$  为

$$\begin{aligned} \Xi_{N\&I}(z, y) = \{ & (z_+; u) \in \mathbb{R}^{n+m} | \\ & (z_+; u; z; y) \in \Theta_{N\&I} \} \end{aligned} \quad (14)$$

类似地,根据集合  $\Phi_{N\&I}$  同样可以定义  $(z_+ - u)$  空间中的非空集合为

$$\begin{aligned} \Psi_{N\&I}(z, x) = \{ & (z_+; u) \in \mathbb{R}^{n+m} | \\ & (z_+; u; z; x) \in \Phi_{N\&I} \} \end{aligned} \quad (15)$$

从  $\Psi_{N\&I}(z, x)$  和  $\Xi_{N\&I}(z, y)$  的定义可以看出:

$$\Xi_{N\&I}(z, y) = \bigcap_{x \in X_y(y) \cap X_z(z)} \Psi_{N\&I}(z, x) \quad (16)$$

由于原点  $(0; 0; 0; 0) \in \mathbb{R}^{3n+m}$  并没有包含在  $\Phi_{N\&I}$ , 可知  $\Psi_{N\&I}(0, 0) = \emptyset$ , 由式(16)可知  $\Xi_{N\&I}(0, 0) = \emptyset$ .

令  $\Omega_{N\&I} \subset \mathbb{R}^{2n}$  表示所有满足  $\Xi_{N\&I}(z, h(x)) \neq \emptyset$  的状态  $(z; x)$  的集合, 定义如式(17)所示。

$$\Omega_{N\&I} = \{ (z; x) \in \mathbb{R}^{2n} \mid \Xi_{N\&I}(z, h(x)) \neq \emptyset \} \quad (17)$$

### 1.5 闭环 DOA 估计和输出反馈镇定的充分条件

上节中得到  $\Omega_{N\&I}$  和  $\Xi_{N\&I}(z, y)$ , 这里  $\Omega_{N\&I}$  可以作为闭环系统 DOA 的估计,  $\Xi_{N\&I}(z, y)$  是一个非结构化的动态输出反馈控制器集合。

首先由于  $\Phi_{N\&I}$  是负定集, 根据式(9), 对于所有的  $(z(k+1); u(k); z(k); x(k)) \in \Phi_{N\&I}$ , 在任意  $k$  时刻,  $L(z(k), x(k))$  的时间步差值是负定的。其次由于  $\Phi_{N\&I}$  是不变集, 根据定义 2, 对于所有的  $(z(k+1); u(k); z(k); x(k)) \in \Phi_{N\&I}$ , 未来  $k+1$  时刻的状态  $(z(k+1); x(k+1))$  位于  $\Omega_{N\&I}$  中。这意味着对于  $(z(k+1); x(k+1))$ , 在  $k+1$  时刻  $L(z(k+1), x(k+1))$  的时间步差值也是负定的。因此可以得出结论: 如果在式(2)中定义的控制  $\xi = (f_z; h_u)$  满足

$$\forall (z; x) \in \Omega_{N\&I}, (f_z(z, h(x)); h_u(z, h(x)); z; x) \in \Phi_{N\&I}$$

那么闭环系统(3)对于  $\Omega_{N\&I} \subset \mathbb{R}^{2n}$  中的所有初始状态都是渐进稳定的, 即下面定理 3 所示。

**定理 3** 如果集合  $\Phi_{N\&I}$  对于闭环系统(3)来说是负定不变集, 那么对于任何满足条件的控制器  $\xi = (f_z, h_u): \mathbb{R}^{n+p} \rightarrow \mathbb{R}^{n+m}$ :

$$\begin{aligned} \forall (z; x) \in \Omega_{N\&I}, (f_z(z, h(x)); h_u(z, h(x)); z; x) \in \\ \Phi_{N\&I} \end{aligned} \quad (18)$$

那么闭环系统(3)对于  $\Omega_{N\&I} \subset \mathbb{R}^{2n}$  中的所有初始状态  $(z_0; x_0)$  都是渐进稳定的。

**证明** 由于对于闭环系统(3)和李雅普诺夫函数  $L$  来说,  $\Phi_{N\&I}$  是负定集, 根据式(9)和式(18), 可以得出如下结论

$$\begin{aligned} \forall (z; x) \in \Omega_{N\&I}, L(f_z(z, h(x)), f(x, h_u(z, h(x)))) - \\ L(z, x) < 0 \end{aligned} \quad (19)$$

由于  $\Phi_{N\&I}$  对于系统(3)是不变集, 根据定义 2 和式(18)可知:

$$\begin{aligned} \forall (z; x) \in \Omega_{N\&I}, (f_z(z, h(x)); f(x, h_u(z, h(x)))) \in \\ \text{proj}_{zx}(\Omega_{N\&I}) \end{aligned} \quad (20)$$

对于闭环系统(3), 令  $\tau(z_0; x_0; k) = (z(k); x(k))$  表示初始状态为  $(z_0; x_0)$ , 在时刻  $k$  系统的状态  $(z(k); x(k))$ 。从式(19)和式(20)可以得出:

$$\begin{aligned} \forall (z_0; x_0) \in \Omega_{N\&I}, L(\tau(z_0; x_0; k+1)) < \\ L(\tau(z_0; x_0; k)) \end{aligned}$$

上述关系表明, 对于任意的  $(z_0; x_0) \in \Omega_{N\&I}$ ,  $L(\tau(z_0; x_0; k))$  是随时间单调递减的。由于函数  $L$  是正定的,  $L(\tau(z_0; x_0; k))$  的下界为 0, 因此有

$$\forall (z_0; x_0) \in \Omega_{N\&I}, \lim_{k \rightarrow \infty} L(\tau(z_0, x_0, k)) = 0$$

从上述公式中, 可以得到以下结论。

$$\forall (z_0; x_0) \in \Omega_{N\&I}, \lim_{k \rightarrow \infty} \tau(z_0, x_0, k) = 0$$

这可以通过反证法来证明(具体细节请参阅文献[29])。

根据定理 3 可知, 若能获得负定不变集  $\Phi_{N\&I} \in \mathbb{R}^{3n+m}$ , 那么任何满足条件  $(f_z(z, h(x)); h_u(z, h(x)); z; x) \in \Phi_{N\&I}$  的控制  $\xi = (f_z; h_u) \in \Xi_{N\&I}(z, y)$  都可以渐进稳定闭环系统式(3), 并且  $\Omega_{N\&I}$  可以作为闭环 DOA 的估计值。然而, 由于  $f$  和  $L$  的非线性, 很难获得  $\Phi_{N\&I}$  的解析解。 $\Xi_{N\&I}(z, y)$  和  $\Omega_{N\&I}$  的求解都是基于  $\Phi_{N\&I}$ , 在下一节中, 将使用区间分析方法来近似求解负定不变集  $\Phi_{N\&I}$ 。

## 2 DOA 估计和输出反馈控制: 区间分析方法

根据定理 3, 对于给定的正定函数  $L: \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$ , 如果得到了  $\Xi_{N\&I}(z, y)$  和  $\Omega_{N\&I}$ , 那么任何控制器  $\xi(z, y) \in \Xi_{N\&I}(z, y)$  都可以保证闭环系统式(3)的所有任意初始状态  $(z_0; x_0) \in \Omega_{N\&I}$  最终都能渐进稳定于原点。换言之,  $\Xi_{N\&I}(z, y)$  可以被视为一个非结构化的控制器集合, 在其中的任何控制器都可以渐进稳定该系统, 并且  $\Omega_{N\&I}$  是该闭环系统式(3)的 DOA 估计, 其中  $\Xi_{N\&I}(z, y)$  和  $\Omega_{N\&I}$  的求解都是基于  $\Phi_{N\&I}$ 。然而, 由于  $f$  和  $L$  的非线性, 很难获得  $\Phi_{N\&I}$  的解析解。在本节中, 将使用区间分析方法来近似求解负定不变集  $\Phi_{N\&I}$ 。

### 2.1 区间分析

区间分析是一种用于近似集合的可保证的数值方法。这里的“可保证”意味着可以获得感兴趣集合的近似解, 这些近似解可以尽可能精确<sup>[25]</sup>。SIVIA(set inversion via interval analysis)算法是区间分析中的一种基本工具, 它使用非重叠的“盒子”来近似由函数  $p: \mathbb{R}^{n_1} \rightarrow \mathbb{R}^{n_2}$  和集合  $Y \subset \mathbb{R}^{n_2}$  定义的集合倒置  $W$ 。

$$W = \{w \in \mathbb{R}^{n_1} \mid p(w) \in Y\} \quad (21)$$

SIVIA 的基础是区间向量和包含函数的概念, 这里简要介绍下这些概念。一个区间向量  $[w]$  是  $\mathbb{R}^{n_1}$  中的一个子集, 它的定义如下所示。

$$[w] = [w_{(1)}] \times [w_{(2)}] \times \cdots \times [w_{(n_1)}]$$

式中: 第  $j$  个区间  $[w_{(j)}] = [\underline{w}_{(j)}, \bar{w}_{(j)}]$ ,  $j = 1, 2, \dots, n_1$  是  $\mathbb{R}$  中的连通子集,  $\underline{w}_{(j)}$  和  $\bar{w}_{(j)}$  分别是  $[w_{(j)}]$  的上界和下界。 $[w] \in \mathbb{I}\mathbb{R}^{n_1}$  也被称为一个盒子, 其中  $\mathbb{I}\mathbb{R}^{n_1}$  表示所有  $n_1$  维盒子的集合。考虑函数:  $p: \mathbb{R}^{n_1} \rightarrow \mathbb{R}^{n_2}$ , 区间函数  $[p]: \mathbb{I}\mathbb{R}^{n_1} \rightarrow \mathbb{I}\mathbb{R}^{n_2}$ , 如果对于  $\forall [w] \in \mathbb{I}\mathbb{R}^{n_1}$ ,  $p([w]) \subset [p]([w])$ , 那么  $[p]$  是  $p$  的包含函数。如果对于  $\forall [w] \in \mathbb{I}\mathbb{R}^{n_1}$ , 都满足:

$$\lim_{d([w]) \rightarrow 0} d([p]([w])) = 0$$

式中:  $d[w] = \max_{1 \leq j \leq n_1} (\bar{w}_{(j)} - \underline{w}_{(j)})$  表示盒子  $[w]$  的宽度, 那么包含函数  $[p]$  是收敛的。收敛的包含函数可以保证 SIVIA 算法的收敛性。对于一个函数

来说, 其收敛的包含函数不是唯一的, 例如, 自然形式、中心形式和泰勒形式等。

算法 1 是 SIVIA 的具体代码。

#### 算法 1 SIVIA

**Require:**  $f, L, [\phi_{\text{cons}}], \epsilon$

```

1:  $\hat{\Phi}_{in} = \emptyset, \hat{\Phi}_{out} = \emptyset, \hat{\Phi}_{bou} = \emptyset, \hat{\Phi}_{do} = \{[\phi_{\text{cons}}]\}$ 
2: while  $\hat{\Phi}_{do} \neq \emptyset$  do
3:   Get a box  $[z_+] \times [u] \times [z] \times [x]$  from  $\hat{\Phi}_{do}$ 
4:   Remove  $[z_+] \times [u] \times [z] \times [x]$  from  $\hat{\Phi}_{do}$ 
5:    $[d] = [L]([z_+], [f]([x], [u])) - [L]([z], [x])$ 
6:   if  $[d] \subset (-\infty, 0)$ 
7:     Add  $[z_+] \times [u] \times [z] \times [x]$  to  $\hat{\Phi}_{in}$ 
8:   else if  $[d] \cap (-\infty, 0) = \emptyset$ 
9:     Add  $[z_+] \times [u] \times [z] \times [x]$  to  $\hat{\Phi}_{out}$ 
10:  else if  $d([w]) < \epsilon$ 
11:    Add  $[z_+] \times [u] \times [z] \times [x]$  to  $\hat{\Phi}_{bou}$ 
12:  else
13:    Bisect box  $[z_+] \times [u] \times [z] \times [x]$ 
14:    Add the two new boxes to set  $\hat{\Phi}_{do}$ 
15:  end if
16: end while

```

SIVIA 算法可以找到  $W$  的内部近似集合  $\hat{W}_{in} \subset W_{\text{cons}} \subset \mathbb{R}^{n_1}$ , 其中  $W_{\text{cons}}$  是一个给定的初始搜索集。

现在考虑给定的一个正定函数  $L: \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$ , 状态方程  $f: \mathbb{R}^{n+m} \rightarrow \mathbb{R}^n$  以及初始感兴趣的盒子  $[\phi_{\text{cons}}]$ 。可以通过 SIVIA 方法找到  $\Phi_N \subset \mathbb{R}^{3n+m}$  的内部近似集合  $\hat{\Phi}_N \subset [\phi_{\text{cons}}] \subset \mathbb{R}^{3n+m}$ , 如算法 1 所示。

SIVIA 执行递归探索(在算法 1 的 while 循环中), 对于给定的  $([z_+]; [u]; [z]; [x]) \subset \mathbb{R}^{3n+m}$ , 可能会出现以下 4 种情况。

(1) 情况 1

$$[d] = [L]([z_+], [f]([x], [u])) - [L]([z], [x]) \subset \mathbb{I}\mathbb{R}$$

完全包含在  $(-\infty, 0)$  中, 即

$$L([z_+], f([x], [u])) - L([z], [x]) \subset [L]([z_+], [f]([x], [u])) - [L]([z], [x]) \subset$$

$$(-\infty, 0)$$

那么  $[z_+] \times [u] \times [z] \times [x]$  完全位于  $\Phi_N$  中, 将其存储在  $\hat{\Phi}_{in}$ , 如算法 1 的第 6~7 行所示。

(2) 情况 2

$$[d] = [L]([z_+], [f]([x], [u])) - [L]([z], [x]) \subset \mathbb{R}$$

和  $(-\infty, 0)$  的交集为空, 即

$$L([z_+], f([x], [u])) - L([z], [x]) \subset [L]([z_+], [f]([x], [u])) - [L]([z], [x]) \not\subset (-\infty, 0)$$

那么盒子  $[z_+] \times [u] \times [z] \times [x]$  就不属于  $\Phi_N$ , 将其存储在  $\hat{\Phi}_{out}$ , 如算法 1 的第 8~9 行所示。

(3) 情况 3

$$[d] = [L]([z_+], [f]([x], [u])) - [L]([z], [x]) \subset \mathbb{R}$$

和  $(-\infty, 0)$  的交集不为空, 但是又不完全位于  $(-\infty, 0)$ , 那么  $[z_+] \times [u] \times [z] \times [x]$  就包含了  $\Phi_N$  的边界, 则被称之为不确定的盒子。如果  $[z_+] \times [u] \times [z] \times [x]$  的宽度小于预先设定的参数  $\epsilon > 0$ , 则认为它足够小, 可以存储在集合  $\hat{\Phi}_{bou}$ , 这个集合包含了  $\Phi_N$  的边界, 如算法 1 的第 10~11 行所示。

(4) 情况 4

如果  $[z_+] \times [u] \times [z] \times [x]$  是不确定的, 并且盒子宽度大于  $\epsilon > 0$ , 那么应该沿着具有最大宽度的维度对  $[z_+] \times [u] \times [z] \times [x]$  进行二分, 生成的两个新盒子存储在集合  $\hat{\Phi}_{do}$ , 这些盒子需要进一步探索, 如算法 1 中的第 12~14 行所示。递归实现探索, 直到集合  $\hat{\Phi}_{do}$  为空为止。

## 2.2 区间分析求解负定不变集

在此小节中, 提出了一种基于 SIVIA 的算法, 用来估计给定正定函数  $L$  的闭环系统式(3)的负定不变集  $\Phi_{N\&I}$ 。对于给定的李雅普诺夫函数  $L$ , 可以使用 SIVIA 算法来近似求解在式(9)中定义的负定集  $\Phi_N$ 。李雅普诺夫函数的差分  $\Delta L(\phi)$  定义为

$$\Delta L(\phi) = L(f_z(z, h(x)), f(x, h_u(z, h(x)))) - L(z, x)$$

式中:  $\phi = (z_+; u; z; x)$ 。利用  $\Delta L(\phi)$ , 式(9)可以重写为式(22)。

$$\Phi_N = \{\phi \in \mathbb{R}^{3n+m} \mid \Delta L(\phi) \in (-\infty, -\alpha)\} \quad (22)$$

对比式(21)和(22), 可以对初始搜索集  $\Phi_{cons}$  的近似  $\hat{\Phi}_{cons}$  使用 SIVIA 算法, 来获得负定集  $\Phi_N$  的内部近似  $\hat{\Phi}_N$ , 如下所示。

$$\hat{\Phi}_N := \text{SIVIA}(\Delta L, \{-\infty, -\alpha\}, \hat{\Phi}_{cons}, \epsilon)$$

如算法 2 的第 1~2 行所示。在假设 1 中定义了约束集  $\Phi_{cons}$ ,  $\hat{\Phi}_{cons}$  是  $\Phi_{cons}$  的一个初始预测, 由一组盒子组成。

根据定理 2,  $\Phi_{N\&I} = J^\infty(\Phi_N)$  是  $\Phi_N$  的一个不变子集, 使用 SIVIA 算法来近似映射  $J$  的操作。将式(6)和式(21)相比较, 例如对于给定的盒子集合  $\hat{\Phi}_1$ , 可以使用如下方式获得  $J(\hat{\Phi}_1)$  的内部近似  $\hat{\Phi}_2$ 。

$$\hat{\Phi}_2 := \text{SIVIA}(f, \text{proj}_{zx}(\hat{\Phi}_1), \hat{\Phi}_1, \epsilon).$$

---

### 算法 2 Inner Approximation of $\Phi_{N\&I}$

---

**Require:**  $f, L, \hat{\Phi}_{cons}, \epsilon, \alpha$

- 1:  $\Delta L(\phi) = L(f_z(z, h(x)), f(x, h_u(z, h(x)))) - L(z, x)$
  - 2:  $\hat{\Phi}_N := \text{SIVIA}(\Delta L, \{-\infty, -\alpha\}, \hat{\Phi}_{cons}, \epsilon)$
  - 3:  $\hat{\Phi}_1 := \hat{\Phi}_N$
  - 4:  $\hat{\Phi}_2 := \emptyset$
  - 5: **while**  $\hat{\Phi}_1 \neq \hat{\Phi}_2$  **do**
  - 6:      $\hat{\Phi}_2 := \hat{\Phi}_1$
  - 7:      $\hat{\Phi}_1 := \text{SIVIA}(f, \text{proj}_{zx}(\hat{\Phi}_2), \hat{\Phi}_2, \epsilon)$
  - 8: **end while**
  - 9:  $\hat{\Phi}_{N\&I} := \hat{\Phi}_1$
  - 10: **return**  $\hat{\Phi}_{N\&I}$
- 

通过对初始集合  $\hat{\Phi}_N$  迭代地使用 SIVIA 算法来近似映射  $J$ , 可以获得负定不变集  $\Phi_{N\&I}$  的内部近似  $\hat{\Phi}_{N\&I}$ , 如算法 2 的第 3~9 行所示。

通过使用算法 2, 可以获得负定不变集  $\Phi_{N\&I}$  的内部近似  $\hat{\Phi}_{N\&I}$ , 它由不相交的盒子组成, 每一个盒子  $[z_+] \times [u] \times [z] \times [x] \in \hat{\Phi}_{N\&I}$  都满足:

$$L([z_+], f([x], [u])) - L([z], [x]) \subset (-\infty, 0).$$

这意味着  $\forall (z_+; u; z; x) \in [z_+] \times [u] \times [z] \times [x] \in \hat{\Phi}_{N\&I}$ , 都满足  $L(z_+, f(x, u)) - L(z, x) < 0$ 。

在获得  $\hat{\Phi}_{N\&I}$  之后, 根据式(15), 可以得到  $\Psi_{N\&I}(z, x)$  的内部近似, 如式(23)所示。

$$\hat{\Psi}_{N\&I}(z, x) = \{(z_+; u) \in \mathbb{R}^{n+m} \mid (z_+; u; z; x) \in \hat{\Phi}_{N\&I}\} \quad (23)$$

根据式(16),可以得到  $\Xi_{N\&I}(z, y)$  的内部近似  $\hat{\Xi}_{N\&I}(z, y)$ , 如式(24)所示。

$$\hat{\Xi}_{N\&I}(z, y) = \cap_{x \in X_y(y) \cap \hat{X}_z(z)} \hat{\Psi}_{N\&I}(z, x) \quad (24)$$

式中:  $\hat{X}_z(z) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid (z; x) \in \text{proj}_{zx}(\hat{\Phi}_{N\&I})\}$ 。

根据式(17),可以得到  $\Omega_{N\&I}$  的内部近似  $\hat{\Omega}_{N\&I}$ 。

$$\hat{\Omega}_{N\&I} = \{(z; x) \in \mathbb{R}^{2n} \mid \hat{\Xi}_{N\&I}(z, h(x)) \neq \emptyset\} \quad (25)$$

### 2.3 闭环 DOA 估计和控制器设计

在上一小节中,使用区间分析方法获得了  $\Xi_{N\&I}(z, y)$  和  $\Omega_{N\&I}$  的内部近似  $\hat{\Xi}_{N\&I}(z, y)$  和  $\hat{\Omega}_{N\&I}$ 。由于  $\Xi_{N\&I}(0, 0)$  是空集,因此在  $(z - y)$  空间中存在一个原点的邻域  $\Gamma_0 \subset \mathbb{R}^{n+p}$ , 在这个邻域内的任意点  $(z; y)$  都满足  $\hat{\Xi}_{N\&I}(0, 0) = \emptyset$ 。由于在  $(z - x)$  空间中的原点不在  $\Omega_{N\&I}$  中,因此在  $(z - x)$  空间中存在一个原点的邻域  $\Omega_0 \subset \mathbb{R}^{2n}$  不被  $\hat{\Omega}_{N\&I}$  所包含。这些原点的邻域大小取决于算法 2 中的参数  $\epsilon$ 。如果系统式(1)的线性化是可检测的,那么当  $\Omega_0$  的大小足够小时,必定存在一种线性输出反馈控制器,可以稳定  $\Omega_0$  中的所有状态  $(z; x)$ 。

获得一个输出反馈控制器  $\xi(z, y) \in \hat{\Xi}_{N\&I}(z, y)$  的方法是,首先构建一个数据集  $\{(z^i_+; u^i), (z^i; y^i)\}$ , 其中  $(z^i_+; u^i) \in \hat{\Xi}_{N\&I}(z^i, y^i)$  对于  $(z^i, y^i) \notin \Gamma_0$ ; 然后通过使用诸如插值、高斯过程回归、神经网络等函数逼近方法来找到控制器  $\xi$ 。当训练数据点的趋势足够平滑时,可以保证从函数估计器获得控制器属于  $\hat{\Xi}_{N\&I}(z, y)$ 。

## 3 验证与仿真

在本文所考虑的问题中,系统的输出是可测的而不是状态可测,输出仅包含状态的部分信息,不同的状态可能有相同的系统输出。考虑如下系统对象。

$$x(k+1) = -\sin(2x(k)) - x(k)u(k) -$$

$$y(k) = \begin{cases} 0.2 \cdot x(k) - u^2(k) + u(k) & x(k) < -0.05 \\ x(k) & -0.05 \leq x(k) \leq 0.05 \\ 0.05 & x(k) > 0.05 \end{cases}$$

式中:  $x(k) \in \mathbb{R}$  表示系统状态,  $u(k) \in \mathbb{R}$  表示控制输入,  $y(k) \in \mathbb{R}$  表示系统输出。从系统的状态方程可以看出,其关于控制输入是非仿射的,该系统是一个一般非线性离散时间系统,在极点处状态方程的线性化为  $x(k+1) = -2.2x(k) + u(k)$ , 因此开环系统在极点不是渐近稳定的;从系统的输出方程可以看出其满足饱和特性,当状态变量  $x(k) < -0.05$  或者  $x(k) > 0.05$ , 随着系统状态变化,系统输出保持常值,那么此时不同的系统状态就有相同的系统输出。

正定函数  $L$  选为  $L(z, x) = z^2 + x^2$ , 其中  $z$  表示控制器的状态,参数  $\epsilon = 0.01, \alpha = 10^{-14}$ , 初始搜索集为

$$\hat{\Phi}_{\text{cons}} = [-0.2, 0.2] \times [-0.2, 0.2] \times [-0.2, 0.2] \times [-0.2, 0.2]$$

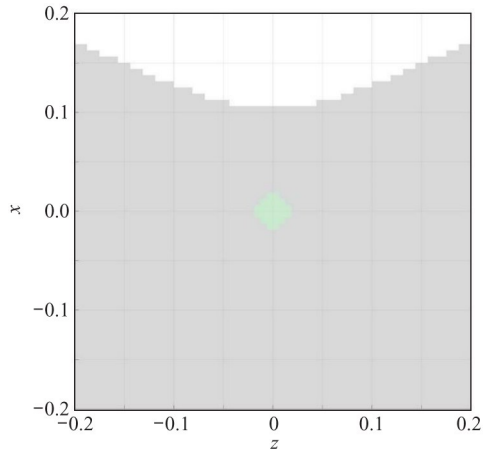
通过算法 1,可以得到负定集  $\Phi_N$  的内部近似  $\hat{\Phi}_N$ 。对于该系统对象,可知  $\hat{\Phi}_N \in \mathbb{R}^4, \text{proj}_{zx}(\hat{\Phi}_N) \subset \mathbb{R}^2$ , 如图 1(a)。

在获得  $\hat{\Phi}_N$  之后,通过算法 2,可以进一步求得负定不变集  $\hat{\Phi}_{N\&I} \in \mathbb{R}^4$ , 根据式(23)可以得到一个非结构化的状态反馈控制器集合  $\hat{\Psi}_{N\&I}(z, x)$ 。为了进一步解释如何由  $\hat{\Psi}_{N\&I}(z, x)$  得到一个非结构化的输出反馈控制器集合  $\hat{\Xi}_{N\&I}(z, y)$ , 即式(24)的过程,这里进行举例解释。对于仿真所采用的系统对象,取区间  $[z] = [-0.04375, -0.03750]$ ,  $y = 0.05$ , 则有:

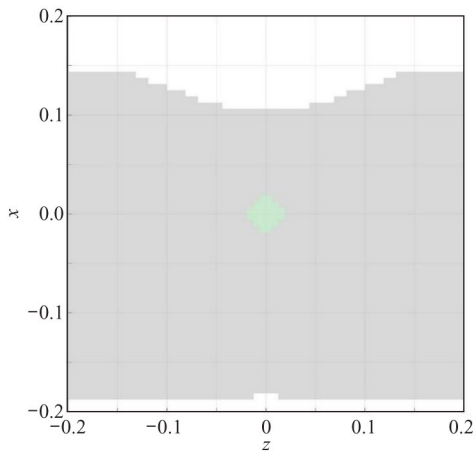
$$\hat{\Xi}_{N\&I}([z], y) = \cap_{[x] \in X_y(y) \cap \hat{X}_z([z])} \hat{\Psi}_{N\&I}([z], [x])$$

式中:区间  $[z] = [-0.04375, -0.03750]$ , 区间  $[x]$  的取值为  $[0.05; 0.00625; 0.10625]$ , 共 9 个小区间,如图 2(a) 蓝色矩形范围所示。图 2(a) 中每一个  $[z] \times [x]$  蓝色矩形盒子所对应的  $\hat{\Psi}_{N\&I}([z], [x])$  依次如图 2(b) - (j) 所示,  $\hat{\Xi}_{N\&I}([z], y)$  即为

图 2(b) - (j) 所有的蓝色矩形范围的交集, 结果为图 2(j)。



(a) 算法 1 所得  $proj_{zx}(\hat{\Phi}_N)$  以及  $\hat{\Omega}_N$



(b) 算法 2 所得  $proj_{zx}(\hat{\Phi}_{N\&I})$  以及  $\hat{\Omega}_{N\&I}$

图 1 通过算法 1 和算法 2 分别得到的  $proj_{zx}(\hat{\Phi}_N)$  和  $\hat{\Omega}_{N\&I}$

得到  $\hat{\Xi}_{N\&I}(z, y)$  之后, 根据式 (25) 可得到  $\hat{\Omega}_{N\&I}$ , 如图 1(b) 灰色区域所示, 绿色区域为  $\Omega_0$ 。根据定理 3 可知  $\hat{\Omega}_{N\&I}$  加上  $\Omega_0$  可以作为闭环系统 (3) 的 DOA 估计。而  $\hat{\Xi}_{N\&I}(z, y)$  可以被视为非结构化的输出反馈控制器集合, 由  $\hat{\Xi}_{N\&I}(z, y)$  构建一个数据集  $\{(z_+^i; u^i), (z^i; u^i)\}$ , 其中  $(z_+^i; u^i) \in \hat{\Xi}_{N\&I}(z_+^i; u^i)$ 。使用插值算法来得到控制律:

$$\begin{pmatrix} z_+ \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_z(z, y) \\ h_u(z, y) \end{pmatrix} = \zeta(z, y) \in \hat{\Xi}_{N\&I}(z, y) \quad (26)$$

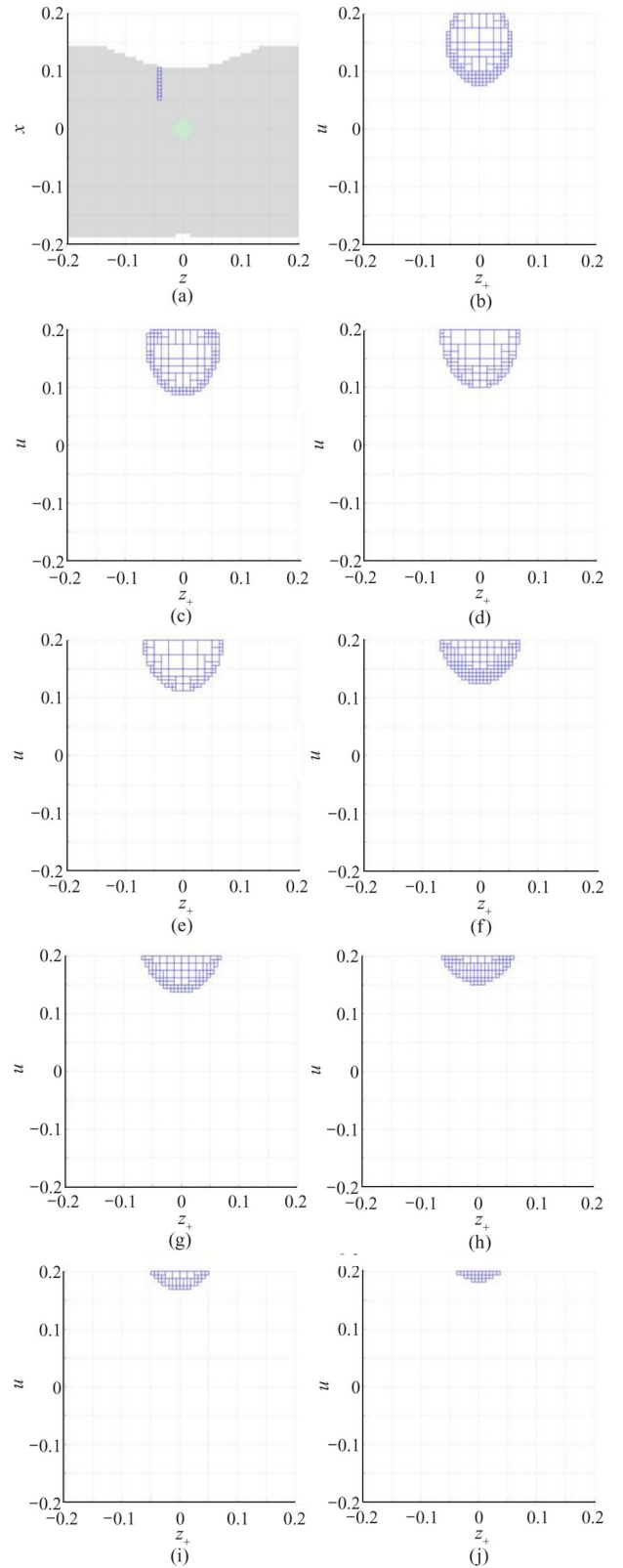


图 2 所选中的  $[z] \times [x]$  及对应的  $\hat{\Psi}_{N\&I}(z, x)$

如图 3 所示, 其中图 3(a) 为控制律  $f_z(z, y)$ , 图 3(b) 为控制律  $h_u(z, y)$ 。

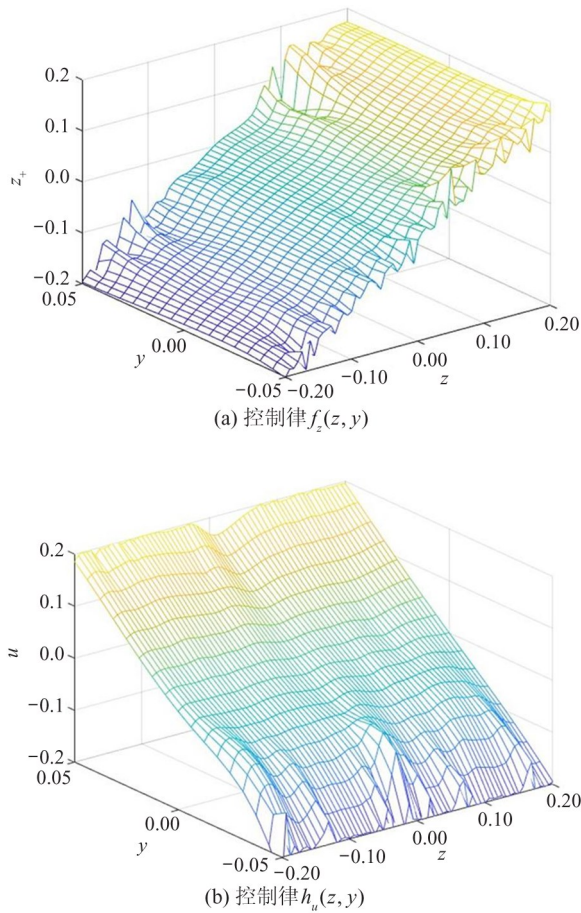


图 3 控制律  $\zeta(z, y)$

得到控制律  $\zeta(z, y)$  之后,对闭环系统进行仿真,如图 4 所示。在  $\hat{\Omega}_{N\&l}$  中随机 200 个初始点,如图 4 中的“ $\times$ ”所示;最终所有的状态轨迹都收敛到原点,如图 4 的虚线所示。

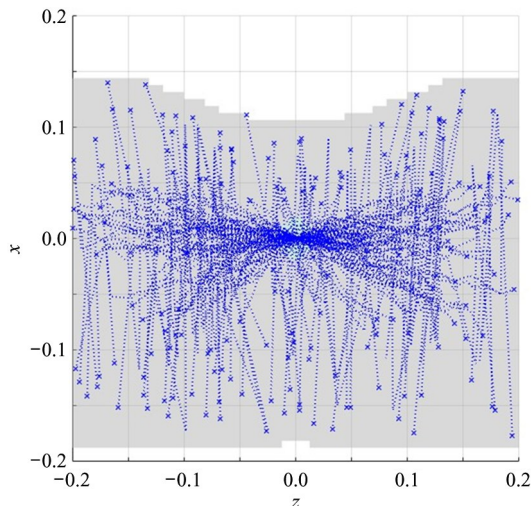


图 4 仿真状态轨迹

## 4 结论

对于一般的非线性系统,由于难以实现全局稳定,因此闭环 DOA 需要广泛的研究。在本文中,针对一般非线性离散时间系统,提出了一种动态输出反馈控制器的设计方法。首先,在负定集和不变集的研究基础上,结合两者概念,针对状态反馈控制下的负定不变集提出了一种求解该集合的映射方法。接着考虑输出反馈控制,又创新性地提出了输出反馈控制下的负定不变集,给出了闭环 DOA 渐近稳定和估计的充分条件,证明了对于给定的李雅普诺夫函数,负定不变集可以被视为一组无结构的动态输出反馈控制器集合,且该负定不变集在  $(z-x)$  空间中的投影可以被视为闭环 DOA 的估计。然后,又创新性地提出了一种算法来近似给定李雅普诺夫函数的负定不变集,该算法是基于区间分析中的 SIVIA 算法。最后,用仿真实例来验证所提出方法的有效性。

## 参考文献

- [ 1 ] Bakolas E. Dynamic output feedback control of the Liouville equation for discrete-time siso linear systems [J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2019, 64(10): 4268-4275.
- [ 2 ] Khalil H K, Esfandiari F. Semiglobal stabilization of a class of nonlinear systems using output feedback [J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 1993, 38(9): 1412-1415.
- [ 3 ] Tian Y X, Yan H C, Zhang H, et al. Dynamic output-feedback control of linear semi-Markov jump systems with incomplete semi-Markov kernel [J]. Automatica, 2020, 117:108997.
- [ 4 ] Chesi G. Computing output feedback controllers to enlarge the domain of attraction in polynomial systems [J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2004, 49(10): 1846-1850.
- [ 5 ] Homer T, Mhaskar P. Output-feedback Lyapunov-based predictive control of stochastic nonlinear systems [J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2018, 63(2): 571-577.

- [ 6 ] Lima T A, Madeira D S, Viana V V, et al. Static output feedback stabilization of uncertain rational nonlinear systems with input saturation [J]. *Systems and Control Letters*, 2022, 168: 105359.
- [ 7 ] Peixoto M L C, Coutinho P H S, Lacerda M J, et al. Guaranteed region of attraction estimation for time delayed fuzzy systems via static output-feedback control [J]. *Automatica*, 2022, 143: 110438.
- [ 8 ] Xu D, Wang X, Hong Y, et al. Output feedback stabilization and estimation of the region of attraction for nonlinear systems: a vector control Lyapunov function perspective [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2016, 61(12): 4034–4040.
- [ 9 ] Zheng X L, She Z K, Lu J J, et al. Computing multiple-Lyapunov-like functions for inner estimates of domains of attraction of switched hybrid systems [J]. *International Journal of Robust Nonlinear Control*, 2018, 28: 5191–5212.
- [ 10 ] Zarei M, Kalhor A, Brake D. Arc length based maximal Lyapunov functions and domains of attraction estimation for polynomial nonlinear systems [J]. *Automatica*, 2018, 90: 164–171.
- [ 11 ] Vannelli A, Vidyasagar M. Maximal Lyapunov functions and domains of attraction for autonomous nonlinear systems [J]. *Automatica*, 1985, 211: 69–80.
- [ 12 ] Tan W, Packard A. Stability region analysis using polynomial and composite polynomial Lyapunov functions and sum-of-squares programming [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2008, 53(2): 565–571.
- [ 13 ] Han D, El-Guindy A, Althoff M. Estimating the domain of attraction based on the invariance principle [C] // 2016 IEEE 55th Conference on Decision and Control. Las Vegas, USA: IEEE, 2016: 5569–5576.
- [ 14 ] Genesio R, Tartaglia M, Vicino A. On the estimation of asymptotic stability regions: state of the art and new proposals [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1985, 30(8): 747–755.
- [ 15 ] Henrion D, Korda M. Convex computation of the region of attraction of polynomial control systems [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2014, 59(2): 297–312.
- [ 16 ] Valmorbida G, Tarbouriech S, Garcia G. State feedback-design for input-saturating quadratic systems [J]. *Automatica*, 2010, 46(7): 1196–1202.
- [ 17 ] Chesi G. On the estimation and control of the domain of attraction through rational Lyapunov functions [C] // 2012 American Control Conference. Montreal, USA: IEEE, 2012: 3322–3327.
- [ 18 ] Vatani M, Hovd M. Lyapunov stability analysis and controller design for rational polynomial systems using sum of squares programming [C] // 2017 IEEE 56th Annual Conference on Decision and Control. Melbourne, Australia: IEEE, 2017: 4266–4271.
- [ 19 ] Saleme A, Tibken B. Nonlinear static state feedback controller design to enlarge the domain of attraction for a class of nonlinear systems [C] // 2013 American Control Conference. Washington, USA: IEEE, 2013: 4074–4085.
- [ 20 ] Ding S, Mei K, Li S. A new second-order sliding mode and its application to nonlinear constrained systems [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2019, 64(6): 2545–2552.
- [ 21 ] Davo M A, Prieur C, Fiacchini M, et al. Enlarging the basin of attraction by a uniting output feedback controller [J]. *Automatica*, 2018, 90: 73–80.
- [ 22 ] Li Y Q, Hou Z S. Data-driven asymptotic stabilization for discrete-time nonlinear systems [J]. *Systems and Control Letters*, 2014, 64: 79–85.
- [ 23 ] Blanchini F. Set invariance in control [J]. *Automatica*, 1999, 35(11): 1747–1767.
- [ 24 ] Li Y Q, Lu C L, Hou Z S, et al. Data-driven robust stabilization with robust domain of attraction estimate for nonlinear discrete-time systems [J]. *Automatica*, 2020, 119: 109031.
- [ 25 ] Jaulin L, Kieffer M, Didrit O, et al. Applied interval analysis [M]. Berlin: Springer, 2001: 3–4.
- [ 26 ] Bertsekas D. Infinite time reachability of state-space regions by using feedback control [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1972, 17(5): 604–613.
- [ 27 ] Rakovic S V, Kerrigan E C, Mayne D Q, et al. Reachability analysis of discrete-time systems with disturbances [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2006, 51(4): 546–561.
- [ 28 ] Rockafellar R T, Wets R J B. Variational analysis [M]. Berlin: Springer Science and Business Media, 2009.
- [ 29 ] Haddad W M, Chellaboina V S. Nonlinear dynamical systems and control: a Lyapunov-based approach [M]. Princeton: Princeton University Press, 2008.

## Negative-definite invariant set approach for dynamic output feedback stabilization with domain of attraction estimation

Zhu Longfei, Lu Chaolun, Li Yongqiang

(College of Information Engineering, Zhejiang University of Technology, Hangzhou 310023)

### Abstract

A design method for a dynamic output feedback controller is proposed for general nonlinear discrete-time systems. Firstly, sufficient conditions for the dynamic output feedback stabilization with an estimated domain of attraction (DOA) are provided. For a given Lyapunov function of system and controller states, a negative definite invariant set under output feedback control is introduced, which can be considered as an unstructured collection of dynamic output feedback controllers. The negative definite invariant set, projected onto the state space, serves as an estimate of the closed-loop DOA. The design problem for the controller is then transformed into a set approximation problem in Euclidean space based on the negative definite invariant set. The bottleneck of dealing with strong nonlinearity is alleviated through the use of numerical set approximation methods. Secondly, a method for estimating the negative definite invariant set is proposed based on interval analysis, aiming to find an internal approximation of the desired accuracy for the set.

**Key words:** output feedback, general nonlinear system, negative-definite invariant set, domain of attraction, interval analysis